Lycée IBN KHALDOUN Radès Mr ABIDI Farid	Devoir de synthèse n°1 $4^{\text{ème}}$ $M_{1\text{-}2}$	Durée : 3 heures 06 Décembre 2010

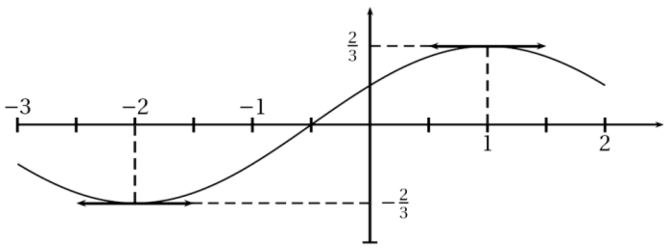
Exercice 1 : (3 points)

Pour chacune des informations suivantes, dire si elle est **Vraie** ou **Fausse** en justifiant vôtre réponse.

Soit f une fonction deux fois dérivable dont la fonction dérivée f' a pour courbe représentative voir ci contre :

1. f admet un maximum en $-\frac{1}{2}$.
2. La courbe de f admet deux points d'inflexion.

Si f(-1) = 1 , alors pour tout x de [-2, 1] , $\left|f(x)-1\right| \leq \frac{2}{3}\left|x+1\right|$.



Exercice 2: (4 points)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = {u_n}^2 + \frac{2}{u_n}$.

1. Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.
   a) Montrer que f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.
   b) Déterminer les réels a et b pour que , pour tout $x \geq 1$, $x^3 - x^2 + 2 = (x+1)(x^2 + ax + b)$.
   c) Résoudre alors, dans $[1,+\infty[$, l'équation $f(x) = x$.
2. a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   b) Montrer que si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ , alors $\ell = f(\ell)$.
   c) Donner la conclusion la plus précise possible sur le comportement de la suite (u_n).

Exercice 3: (4 points)

Dans le graphique à la page 4/4 à compléter et à rendre avec la copie :

(Γ) est la représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$; les points O, $A\left(1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $B\left(2,-\frac{8}{3}\right)$ appartiennent à (Γ) ; la droite (D) est asymptote à (Γ) ; (Γ) admet une branche parabolique de direction $\left(O, \vec{j}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

1. Par lecture graphique :
   a) Donner $f'(0)$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.
   b) Montrer que f réalise une bijection de $]-1,+\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.
   c) Sur quel ensemble, f^{-1} est-elle dérivable ?
   d) Montrer qu'il existe un réel c de]0, 2[tel que $f'(c)=\frac{8}{3}$.
2. Tracer la courbe (Γ') représentative de f^{-1} dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
3. On suppose que f est définie par $f(x)=-\frac{x^3}{\sqrt{1+x^3}}$.
   a) Déterminer pour tout x > -1, $f'(x)$.
   b) En déduire $\left(f^{-1}\right)'\left(f(1)\right)$ et $\left(f^{-1}\right)'\left(f(2)\right)$.
   c) Montrer que pour tout x de $[0,+\infty[$, $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{x^2+\sqrt{x^4+4x^2}}{2}}$.

Exercice 4 : (5 points)

Soit ABCD un carré tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soit O son centre. On désigne par O' le symétrique de O par rapport à la droite (CD).

1. a) Soir r la rotation qui transforme B en Cet C en D. Préciser l'angle et le centre de r.
   b) Soit $f = r\circ S_{(OO')}$. Montrer que f est le symétrie orthogonale d'axe (OD).

2. Soit r'= $t_{\overrightarrow{OO'}}\circ r^{-1}$.

a) Montrer que r' est une rotation dont on précisera l'angle.

b) Déterminer r'(C). En déduire le centre de r'.

3. On désigne par g l'antidéplacement qui transforme D en B et O en O'.

a) Montrer que g est une symétrie glissante que l'on caractérisera.

b) Soit M un point du plan.

Montrer que : g(M) = r'(M) équivaut à f(M) = M.

c) En déduire l'ensemble des points M tels que g(M)= r'(M).

Exercice 5: (4 points)

1. Soir r un strictement positif , déterminer les racines cubiques du nombre complexe $i r^3$.

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On considère un point A d'affixe $a = re^{i\frac{\pi}{6}}$ où r est un réel strictement positif.

2. a) Déterminer l'écriture exponentielle de c l'affixe du point C image de A par la rotation φ de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) Soit B le point d'affixe b tel que OABC soit un carré de sens direct.

Etablir que $b = r\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

c) Quel est l'ensemble des points B lorsque r décrit $\left]0,+\infty\right[$?

3. Pour suppose que r = 2. Soit D, d'affixe d, un point du segment [OC] autre que O et C. On note E= φ(D) et F = ψ(E) où ψ est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Faire une figure.

b) Déterminer, en fonction de d, l'affixe e du point E puis l'affixe f, en fonction de a et d, du point F.

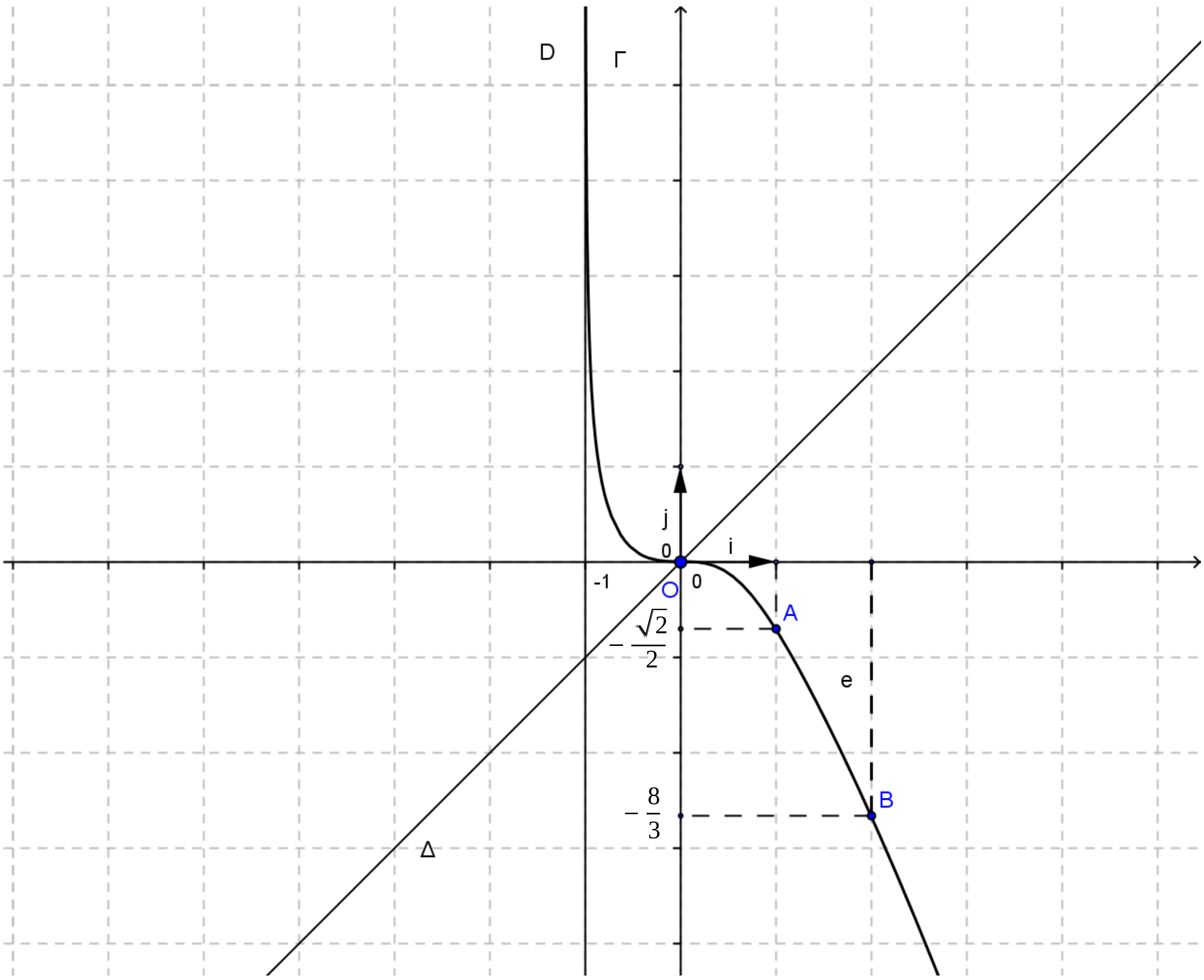
c) Déterminer la position du point D sur [OC] pour que l'aire du triangle AEF soit le double de l'aire du triangle OAC.

d) Pour la valeur de AD trouvée, donner l'écriture exponentielle de d puis de f.

Feuille à compléter et à rendre

Nom de l'élève : …………………………………………..

Classe : ……………………………



CORRIGE

Exercice 1 :

1. Faux

En effet : f' s'annule en $-\frac{1}{2}$ et on a :

pour tout x de $\left]-2,-\frac{1}{2}\right[$, $f'(x)<0$ et pour tout x de $\left]-\frac{1}{2},1\right[$, $f'(x)>0$.

Donc f' admet un minimum.

2. Vrai

En effet :

f' admet un maximum en 1 et un minimum en $-\frac{1}{2}$ donc la dérivée seconde s'annule en changeant en chacun des points 1 et $-\frac{1}{2}$. D'où la courbe de f admet deux points d'inflexions.

3. Vrai.

En effet :

f est dérivable sur [-3, 2] et pour tout x de [-3, 2] , $-\frac{2}{3}\le f'(x)\le\frac{2}{3}$ ou encore $|f'(x)|\le\frac{2}{3}$ donc pour tout x de [-3, 2] , $|f(x)-f(1)|\le\frac{2}{3}|x-(-1)|\Leftrightarrow|f(x)-1|\le\frac{2}{3}|x+1|$.

Exercice 2 :

1.a) Pour tout x réel positif , $f'(x)=2x-\frac{2}{x^2}=\frac{2(x^3-1)}{x^2}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow x^3=1\Leftrightarrow x=1$ et $x>1\Leftrightarrow x^3>1\Leftrightarrow f'(x)>0$.

Donc f est une fonction strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

b) Pour tout $x\ge1$, $x^3-x^2+2=(x+1)(x^2+ax+b)=x^3+(a+1)x^2+(a+b)x+b$.

D'où $\begin{cases}1+a=-1\\a+b=0\\b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=2\end{cases}$.

c) Pour tout x de $[1,+\infty[$,

$$f(x)=x \Leftrightarrow x+\frac{2}{x^2}=x \Leftrightarrow x^3+2=x^2 \Leftrightarrow x^3-x^2+2=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-2x+2)=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ ou } x^2-2x+2=0$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ ou } (x-1)^2+1=0 \quad (\text{impossible})$$

2. a) Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^3-u_n^2+2}{u_n}=\frac{(u_n+1)(u_n^2-2u_n+2)}{u_n}=\frac{(u_n+1)\left[(u_n-1)^2+1\right]}{u_n}.$$

Montrons par récurrence sur n que $u_n \geq 1$:

On a : $u_0=2$ donc $u_0 \geq 1$.

On suppose que $u_n \geq 1$ et on montre que $u_{n+1} \geq 1$.

Comme f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$, alors $u_n \geq 1 \Rightarrow f(u_n) \geq f(1) \Rightarrow u_{n+1} \geq 3$;

donc $u_{n+1} \geq 1$. C'est ce qu'il faut démontrer.

Ainsi, pour tout entier n : $u_n>0$ et $u_n+1>0$ donc $u_{n+1}-u_n \geq 0$ d'où la suite (u_n) est croissante.

b) Supposons que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ :

Comme pour tout entier n, $u_n \geq 1$ alors $\ell \geq 1$. Or f est continue en ℓ donc $\ell=f(\ell)$.

c) L'équation $\ell=f(\ell)$ n'admet aucune solution dans l'intervalle $[1,+\infty[$ donc la suite (u_n) n'admet pas de limite.

La suite (u_n) est croissante et divergente donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

Exercice 3 :

1.a) f'(O) = O et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$.

b) f est continue et strictement décroissante sur $]-1,+\infty[$ donc réalise une bijection de $]-1,+\infty[$ sur

I = $f(]-1,+\infty[)=$ IR.

c) f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et pour tout x de $]-1,+\infty[-\{0\}$, f'(x)≠0 donc f^{-1} est dérivable sur $f(]-1,+\infty[-\{0\})=\mathrm{IR}^*$.

d) f est continue sur [O, 2] et dérivable sur]0, 2[donc il existe un réel c de]0 ; 2[tel que

$$f'(c)=\frac{f(2)-f(0)}{2}=\frac{-\frac{8}{3}-0}{2}=-\frac{4}{3}.$$

2. $\Gamma' = S_{\Delta}(\Gamma)$ où $\Delta : y = x$.

3. a) Pour tout x >-1,

$$f'(x) = -\frac{3x^2\sqrt{1+x^3} - \dfrac{3x^5}{2\sqrt{1+x^3}}}{1+x^3} = -\frac{6x^2(1+x^3)-3x^5}{2(1+x^3)\sqrt{1+x^3}} = -\frac{3x^5+6x^2}{2(1+x^3)\sqrt{1+x^3}}$$

b) $(f^{-1})'(f(1)) = \dfrac{1}{f'(1)} = -\dfrac{4}{15}\sqrt{2}$ et $(f^{-1})'\left(f\left(-\dfrac{8}{3}\right)\right) = \dfrac{1}{f'(2)} = -\dfrac{9}{58}$.

c) $\begin{cases} x \geq 0 \\ f(x) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 0 \\ f^{-1}(y) = x \end{cases}$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow y = -\frac{x^3}{\sqrt{1+x^3}} \Leftrightarrow y^2 = \frac{x^6}{1+x^3} \Leftrightarrow x^6 - y^2x^3 - y^2 = 0$$

On pose $t = x^3$, $t \geq 0$, on obtient $t^2 - y^2t - y^2 = 0$.

Le discriminant est $\Delta = y^4 + 4y^2$ donc les racines sont : $t_1 = \dfrac{y^2 - \sqrt{\Delta}}{2}$ et $t_2 = \dfrac{y^2 + \sqrt{\Delta}}{2} \geq 0$;

D'où $t = \dfrac{y^2 + \sqrt{y^4 + 4y^2}}{2} \Leftrightarrow x^3 = \dfrac{y^2 + \sqrt{y^4 + 4y^2}}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{y^2 + \sqrt{y^4 + 4y^2}}{2}}$.

Ainsi , pour tout x de $[0, +\infty[$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2 + \sqrt{x^4 + 4x^2}}{2}}$.

Exercice 4 :

1. a) On a : $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}}\right) \equiv \pi + \left(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}}\right) [2\pi]$

$$\equiv \pi - \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

Et les médiatrices des segments [BC] et de [CD] se coupent en O.

Donc r est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

2. a) $r' = t_{\overrightarrow{OO'}} \circ r^{-1}$ est la composée d'une translation et d'une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ donc r' est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

b) $r'(C) = t_{\overrightarrow{OO'}} \circ r^{-1}(C) = t_{\overrightarrow{OO'}}(B)$.

De plus :

Soit I le milieu de [CD] , comme O est le milieu de [BD] alors $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Or O' est le symétrique de O par rapport à (CD), donc $\overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{OI}$.

D'où : $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow t_{\overrightarrow{OO'}}(B) = C$ et par suite $r'(C) = C$.

On en déduit que C est le centre de r'.

3. a) Les segments [BD] et [OO'] n'ont pas la même médiatrice donc g n'est pas une symétrique orthogonale d'où g est une symétrie glissante.

Soit (Δ) l'axe de g et $\vec{u}$ son vecteur,

g(B) = D et O milieu de [BD] donc $O \in (\Delta)$

g(O) =O' et I milieu de [OO'] donc $I \in (\Delta)$

Comme $O \neq I$ alors $\Delta = (OI) = (OO')$.

$O \in (\Delta)$ et g(O) = O' donc $\vec{u} = \overrightarrow{OO'}$.

b) g(M) = r'(M) $\Leftrightarrow t_{\overrightarrow{OO'}} \circ S_{(OO')}(M) = r'(M) \Leftrightarrow t_{\overrightarrow{OO'}} \circ S_{(OO')}(M) = t_{\overrightarrow{OO'}} \circ r^{-1}(M)$

$\Leftrightarrow S_{(OO')}(M) = r^{-1}(M) \Leftrightarrow r \circ S_{(OO')}(M) = M \Leftrightarrow f(M) = M$.

c) Pour tout point M du plan , f(M) = M $\Leftrightarrow S_{(OD)}(M) = M$, d'où l'ensemble des points M tel que g(M)=r'(M) est la droite (OD).

Exercice 5 :

1. Pour tout r>0 , $ir^3 = r^3 e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Les racines cubiques de $ir^3 = r^3 e^{i\frac{\pi}{2}}$ sont :

$$z_0 = re^{i\frac{\pi}{6}} \quad , \quad z_1 = re^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)} = re^{i\frac{5\pi}{6}} \quad \text{et} \quad z_2 = re^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)} = re^{i\frac{3\pi}{2}} = re^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

2.a) C = $\varphi(A) \Leftrightarrow c = ia \Leftrightarrow c = ire^{i\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow c = re^{i\frac{2\pi}{3}}$.

b) OABC est un carré de sens direct donc :

$|b| = OB = \sqrt{2}OA = r\sqrt{2}$

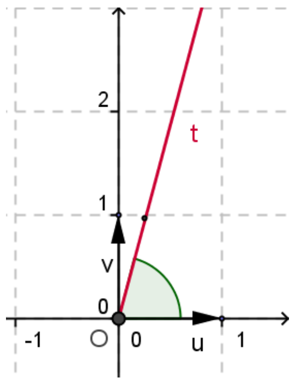
Et $\arg(b) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi] \Leftrightarrow \arg(b) \equiv \left(\vec{u},\overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)[2\pi]$

$\Leftrightarrow \arg(b) \equiv \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}[2\pi] \Leftrightarrow \arg(b) \equiv \frac{5\pi}{12}[2\pi]$

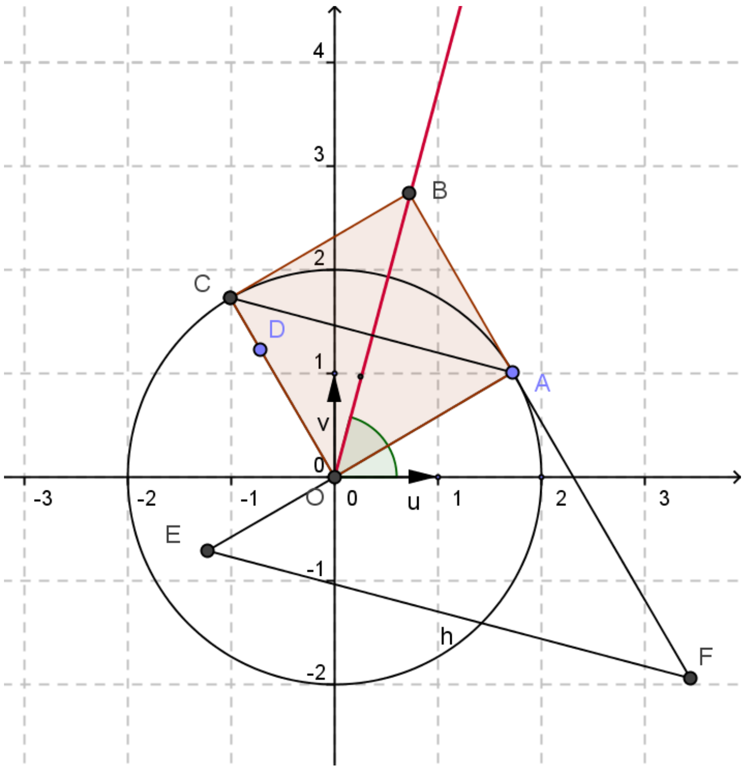
Donc b = $r\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

c) Lorsque r décrit $]0,+\infty[$, OB = $r\sqrt{2}$ décrit $]0,+\infty[$.

Soit $[Ot)$ la demi droite définie par $\left(\vec{u},\overrightarrow{Ot}\right) \equiv \frac{5\pi}{12}[2\pi]$, B décrit la demi droite $[Ot)\setminus\{O\}$.



3 . a)



b) E = $\varphi(D) \Leftrightarrow e = id$

et $F = \psi(E) \Leftrightarrow f - a = i(e-a) \Leftrightarrow f = i(e-a) + a \Leftrightarrow f = i(id-a) + a \Leftrightarrow f = -d - ia + a$

c) Le triangle AEF est isocèle et rectangle en A donc son aire est $\frac{AE^2}{2}$. De même, le triangle OAC est isocèle et rectangle en O donc son aire est $\frac{OA^2}{2}$.

Ainsi , l'aire du triangle AEF est le double de celui de OAC équivaut à $\frac{AE^2}{2} = 2\frac{OA^2}{2}$

équivaut à $AE^2 = 2OA^2$ équivaut à $AE = \sqrt{2}\,OA$.

Comme OA = OC , OE = OD et AE = OA +OE alors AE = OC + OD. Il en résulte :

$$OC + OD = \sqrt{2}\,OC \Leftrightarrow OD = \left(\sqrt{2} - 1\right)OC .$$

d) $|d| = OD = \left(\sqrt{2} - 1\right)OC = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)$

et $\arg(d) \equiv \arg(c)[2\pi] \Leftrightarrow \arg(d) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ donc $d = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)e^{i\frac{2\pi}{3}}$.