Série : similitudes directes

Exercice 1

Soit ABCD un carré direct de centre O . Soit s la similitude directe qui transforme O en B et D en C.

1. Déterminer le rapport et l'angle de s.
2. Montrer que s a pour centre A.
3. Montrer que, pour tout point M distinct de A d'image M' par s, le triangle AMM' est un triangle isocèle, indirect et rectangle en M.

Exercice 2

Soit ABA' un triangle équilatéral direct et B' le point tel que $\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{AA'}$. On considère la similitude directe s qui envoie A sur A' et B sur B'.

1. Déterminer le rapport et l'angle de s.
2. Détermine et placer le centre I de s.
3. Construire $A'' = s(A')$.

Exercice 3

Soit ABC un triangle direct. A', B' et C' sont les points situés à l'extérieur du triangle ABC tels que les triangles $A'BC$, $B'CA$ et $C'AB$ soient équilatéraux. On désigne par J, K et L les centres de gravité respectifs des triangles $A'BC$, $B'CA$ et $C'AB$.

On note S_A la similitude directe de centre A qui transforme K en C et S_B celle de centre B et qui transforme C en J.

1. Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S_A.
2. Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S_B.
3. a) Montrer que $S_B \circ S_A$ est une rotation dont on précisera une mesure de son angle.

   b) Prouver que L est le centre de $S_B \circ S_A$.

4. Déduire de la question 3. Que le triangle JKL est équilatéral direct.

Série : similitudes directes

Exercice 1 :

1. Le rapport de s est $\dfrac{BC}{OD}=\dfrac{BC}{\frac{1}{2}BD}=2\dfrac{BC}{BC\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

   Comme $\left(\widehat{\overrightarrow{OD},\overrightarrow{BC}}\right)\equiv-\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ donc l'angle de s est $-\dfrac{\pi}{4}$.

2. On a : ADO est un triangle isocèle, direct et rectangle en O, s(D) = C et s(O) = B.
   Posons s(A) = A', nous aurons A'CB un triangle isocèle, direct et rectangle en s(O) = B.
   Or ABC est un triangle isocèle, direct et rectangle en B.
   Par suite : s(A) =A.
   Ce qui prouve que A est le centre de s.

3. Soit M un point du plan distinct de A d'image M' par s, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} AM'=\sqrt{2}\,AM \\ \left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}}\right)\equiv-\dfrac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$$

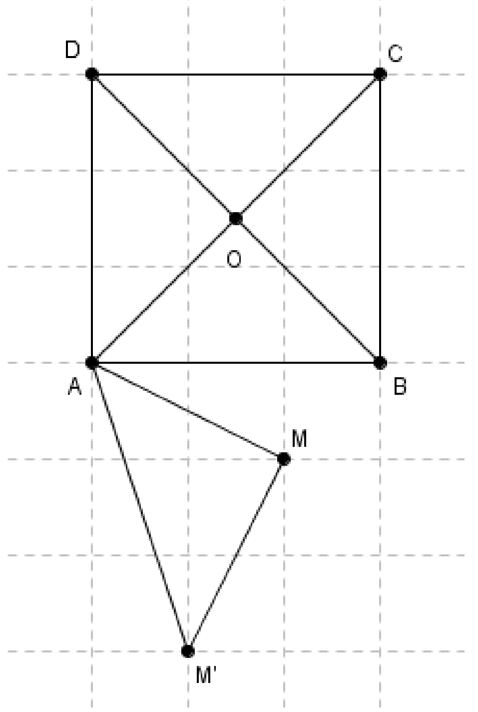
En utilisant la formule d'Al-Kashi :

$$\begin{aligned} MM'^2 &= AM^2+AM'^2-2AM\times AM'\times\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= AM^2+2AM^2-2AM\times\sqrt{2}\,AM\times\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= AM^2+2AM^2-2AM^2 \\ &= AM^2 \end{aligned}$$

D'où $MM'=AM$ et par suite :

$AM'^2=\left(\sqrt{2}AM\right)^2=2AM^2=AM^2+MM'^2$.

On conclue que le triangle AMM' est un triangle isocèle, indirect et rectangle en M.



Exercice 2 :

1. Le rapport de s est $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{2\,AA'}{AA'}=2$.

   Or $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AA'}}\right)[2\pi]\Leftrightarrow\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

   Donc l'angle de s est $\dfrac{\pi}{3}$.

Série : similitudes directes

2. Comme $s(A)=A'$, le centre I de s vérifie : $IA'=2IA$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IA'}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

En utilisant la formule d'Al-Kashi, nous écrivons :

$$AA'^2=IA^2+IA'^2-2IA\times IA'\times\cos\frac{\pi}{3}=AM^2+4AM^2-2AM\times 2AM\times\frac{1}{2}=3AM^2$$

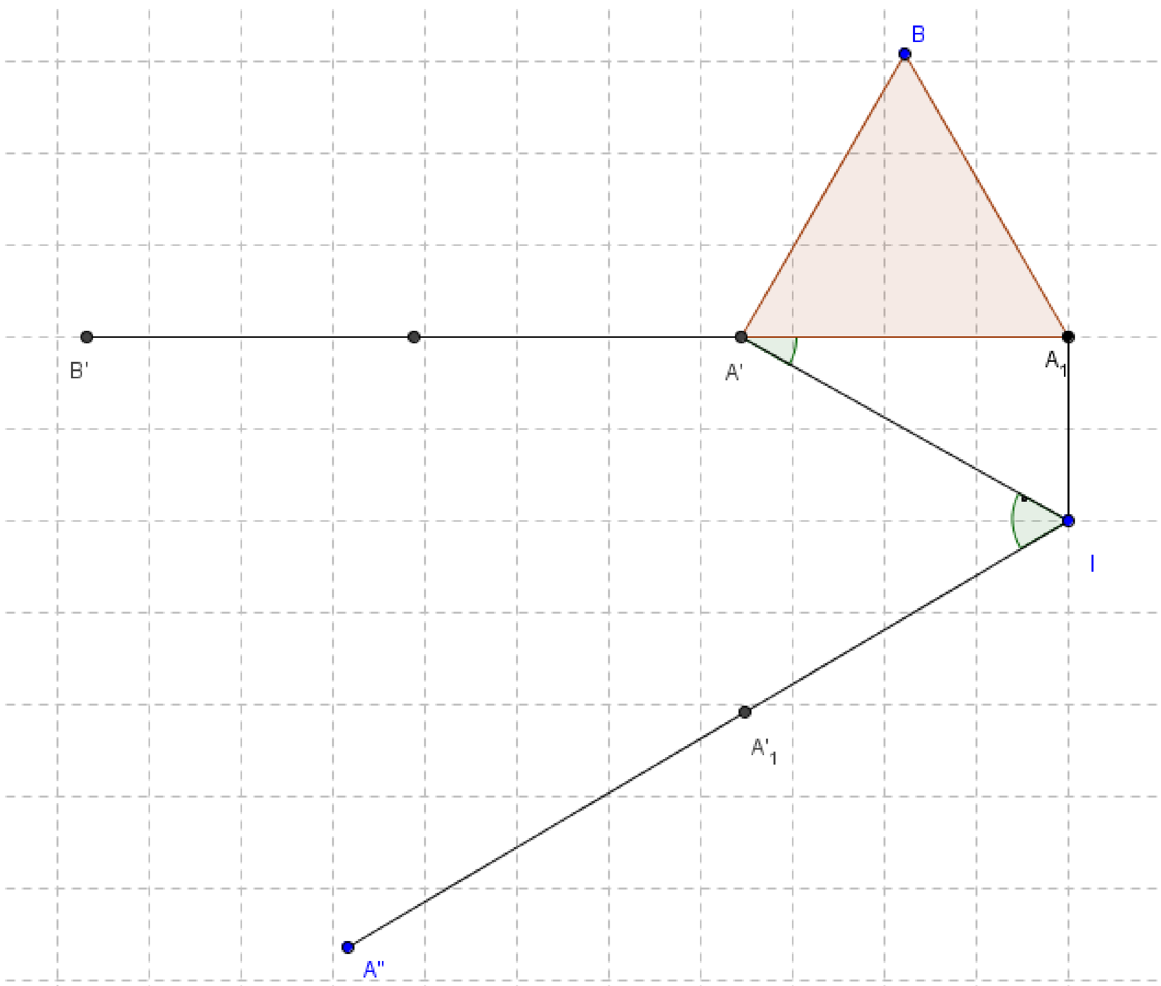
D'où $IA=\frac{1}{\sqrt{3}}AA'$ et $IA'=\frac{2}{\sqrt{3}}AA'$.

On en déduit que : $IA^2+AA'^2=\frac{1}{3}AA'^2+AA'^2=\frac{4}{3}AA'^2=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}AA'\right)^2$ et par suite le triangle IAA' est direct et rectangle en A.

Ainsi, I appartient à la perpendiculaire en A à la droite (AA') et vérifie $\left(\widehat{\overrightarrow{A'A},\overrightarrow{A'I}}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

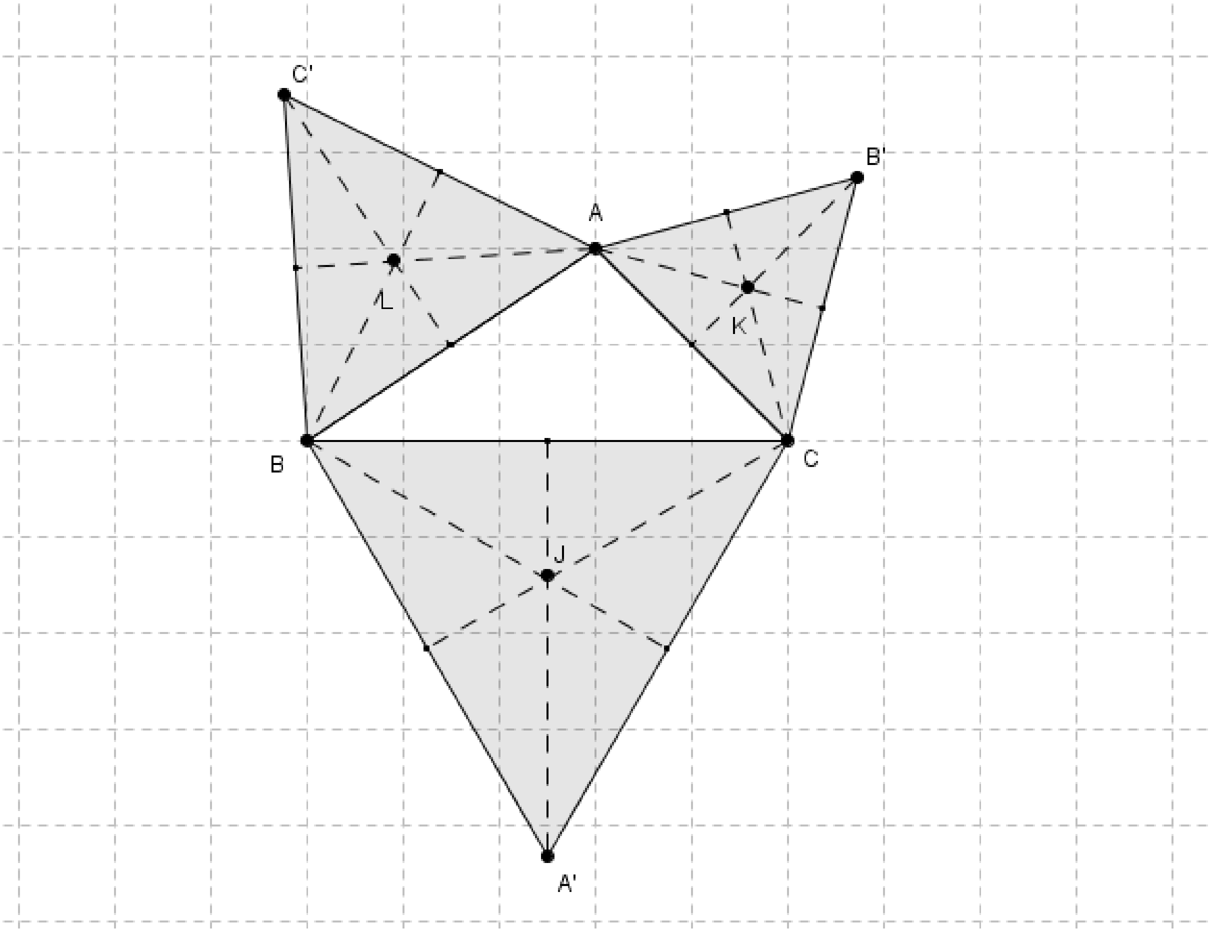
3. Le point A'' est défini par : $IA''=2IA$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IA''}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Soit A_1' le milieu du segment $[IA'']$, on a : $IA''=2IA_1'$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IA_1'}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.



Série : similitudes directes

Exercice 3 :



1. Le rapport de la similitude directe S_A est : $\dfrac{AC}{AK} = \dfrac{AC}{\frac{2}{3}AC\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}$.

   On sait que le triangle $AB'C$ est équilatéral indirect donc $\left(\widehat{\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

D'autre part, (AK) est la bissectrice intérieure de $\left(\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{AC}\right)$, il vient : $\left(\widehat{\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

Donc l'angle de S_A est $-\frac{\pi}{6}$.

2. Le triangle $A'BC$ est équilatéral indirect et J est son centre de gravité donc :

   $\dfrac{BJ}{BC} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BJ}}\right) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

   Par conséquent, S_B est la similitude directe de centre B, de rapport $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{6}$.

3. a) $S_B \circ S_A$ est la composée de deux similitudes directes de rapports respectifs $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $\sqrt{3}$ et

   de même angle $-\dfrac{\pi}{6}$ donc $S_B \circ S_A$ est une similitude directe de rapport 1 et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.

Série : similitudes directes

D'où $S_B \circ S_A$ est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

b) On a : $AC' = \sqrt{3}\,AL$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AL}, \overrightarrow{AC'}}\right) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$ donc $S_A(L) = C'$

et $BL = \frac{1}{\sqrt{3}}BC'$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BL}}\right) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$ donc $S_B(C') = L$

il en résulte $S_B \circ S_A(L) = S_B(C') = L$. Ainsi, L est invariant par $S_B \circ S_A$; L est donc le centre de la rotation $S_B \circ S_A$.

4. On a : $S_B \circ S_A(K) = S_B(C) = J$ ou encore $r_{\left(L, -\frac{\pi}{3}\right)}(K) = J$.

Ce qui prouve que le triangle LKJ est équilatéral indirect ou encore le triangle JKL est équilatéral direct.