Lycée IBN KHALDOUN - RADES **Mathématiques**	***Devoir de contrôle n°2***
Prof : ABIDI Farid	**4 e M 1 *** Mercredi 17-02-2012 *** Durée : 2 heures**

Exercice 1: (4 points)

Répondre par Vrai ou Faux à chacune des propositions suivantes. La Justification de chaque question est exigée.

1. Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. (C) est la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ et (C') désigne la courbe représentative de la fonction g définie par g(x) = x^2. L'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limité par les (C) et (C') et les droites d'équations respectives x =0 et x = 1 vaut : $\frac{1}{3}$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos x} dx = 1 - \sqrt{2}$.

3. $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} |\sin x| dx = \frac{3}{2}$.

4. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \cos 3t.\sin t\, dt = 0$

Exercice 2: (4 points)

Soit (u_n) la suie définie par : $u_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$ et pour tout $n \geq 1$, $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$.

1. Calculer u_0 et u_1.
2. Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = \frac{(n-1)}{n} u_{n-2}$.
3. Calculer le volume du solide de révolution par rotation autour de l'axe des abscisses de la portion de la courbe d'équation $y = \sin x$ où $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 3: (6 points)

1. Soit x un entier relatif.
   a) Démontrer que : $3x \equiv 8(\text{mod}10) \Leftrightarrow x \equiv 6(\text{mod}10)$.
   b) Démontrer que : $x^2 \equiv 6(\text{mod}10) \Leftrightarrow \left(x \equiv 4(\text{mod}10) \text{ ou } x \equiv 6(\text{mod}10)\right)$

2. Soit n un entier naturel.
   a) Vérifier que $n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=3(n+1)^2+2$.
   b) Démontrer que : $n^2+(n+1)^2+(n+2)^2\equiv 0(\mathrm{mod}10)\Leftrightarrow (n+1)^2\equiv 6(\mathrm{mod}10)$.
   c) En déduire que :
   $n^2+(n+1)^2+(n+2)^2\equiv 0(\mathrm{mod}10)\Leftrightarrow \left(n\equiv 3(\mathrm{mod}10)\text{ ou } n\equiv 5(\mathrm{mod}10)\right)$.
   d) En déduire les entiers naturels , multiples de 10 inférieurs à 5 000 , qui sont la somme des carrés de trois entiers consécutifs.

Exercice 4: (6 points)

Dans le plan orienté , on considère un triangle ABC équilatéral direct de côté 2. On note I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [AC] et par D le symétrique de B par rapport à (AC). Soit f la similitude directe qui envoie A sur D et I sur J.

1. a) Montrer que f est d'angle $-\frac{\pi}{6}$ et de rapport $\sqrt{3}$.
   b) Montrer que B est le centre de f.

2. Déterminer l'image de la droite (IC) par f.

3. Soit E l'antécédent de I par f .

Montrer que le triangle IEB est isocèle et les droites (BE) et (IJ) sont perpendiculaires.

En déduire une construction de E.

4. On pose : $g=f\circ S_{(AB)}$.

   a) Déterminer g(B) et g(A) .

   b) En déduire que g est une similitude indirecte dont on précisera le rapport et le centre .

5. On note O le milieu du segment [BC] et on rapporte le plan au repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{OC},\vec{v}\right)$.

   a) Donner l'écriture complexe de f .

   b) Montrer que l'écriture complexe de g est $z'=i\sqrt{3}\bar{z}-1+i\sqrt{3}$.

   c) En déduire une équation de (Δ) l'axe de g.

Corrigé

Exercice 1 :

1. Vrai.
   En effet :
   Pour tout x de [0, 1] , $0 \le x^2 \le \sqrt{x} \Leftrightarrow 0 \le g(x) \le f(x)$ donc l'aire, en ua, de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (C') et les droites d'équations x = 0 et x = 1 est :
   $$\int_0^1 \left(\sqrt{x}-x^2\right)dx = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}-\frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$
2. Faux.
   En effet : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos x}dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x}{\cos^2 x}dx = \left[\frac{1}{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}-1$.
   Remarquons que la fonction $x \mapsto \dfrac{\tan x}{\cos x}$ est continue et positive sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ donc
   $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos x}dx \ge 0.$$
3. Faux
   En effet : $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} |\sin x|dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} |\sin x|dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = 2[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{3}} = 2\left(-\frac{1}{2}+1\right) = 1 \ne \frac{3}{2}$.
4. Vrai
   En effet : Soit f(t) = $\cos 2t.\sin t$
   Pour tout t réel ,
   $f(t+\pi) = \cos(3t+3\pi).\sin(t+\pi) = -\cos(3t+\pi).\sin t = \cos 3t.\sin t = f(t)$
   Donc la fonction f est périodique de période π. D'autre par , f est impaire.
   $$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \cos 3t.\sin t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3t.\sin t\,dt = 0$$

Exercice 2 :

1. $u_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ et $u_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

2. Calculons pour tout $n \ge 2$, $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ par une intégration :

   On pose : u(x) = $\sin^{n-1} x$, u'(x) = $(n-1)\cos x.\sin^{n-2} x$

v'(x) = sinx , v(x) = - cosx

$$u_n = \left[-\cos x.\sin^{n-1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x.\sin^{n-2}x\,dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2}dx$$

$$= (n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n dx\right) = (n-1)(u_{n-2}-u_n) = (n-1)u_{n-2} - (n-1)u_n$$

D'où $n.u_n = (n-1).u_{n-2} \Leftrightarrow u_n = \dfrac{(n-1)}{n}u_{n-2}$.

3. Le volume du solide de révolution par rotation autour de l'axe des abscisses de la portion de la courbe d'équation $y = \sin x$ où $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ est :

$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \pi u_2 = \frac{2-1}{2}.u_0 = \frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Exerc ice 3 :

1. Le tableau des congruences , modulo 10, donne :

$x \equiv .(\text{mod}10)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$3x \equiv .(\text{mod}10)$	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
$x^2 \equiv .(\text{mod}10)$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

On en déduit :

a) $3x \equiv 8(\text{mod}10) \Leftrightarrow x \equiv 6(\text{mod}10)$

b) $x^2 \equiv 6(\text{mod}10) \Leftrightarrow (x \equiv 4(\text{mod}10) \quad \text{ou} \quad x \equiv 6(\text{mod}10))$

2. a) On a $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 = 3n^2 + 6n + 3 + 2$

$$= 3(n^2 + 2n + 1) + 2 = 3(n+1)^2 + 2$$

b) $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 \equiv 0(\text{mod}10) \Leftrightarrow 3(n+1)^2 + 2 \equiv 0(\text{mod}10)$

$$\Leftrightarrow 3(n+1)^2 \equiv -2(\text{mod}10)$$

$$\Leftrightarrow 3\ (n+1)^2 \equiv 8(\text{mod}10)$$

$$\Leftrightarrow (n+1)^2 \equiv 6(\text{mod}10)$$

c) $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 \equiv 0(\text{mod}10) \Leftrightarrow (n+1)^2 \equiv 6(\text{mod}10)$

$$\Leftrightarrow n+1 \equiv 4(\text{mod}10) \text{ ou } n+1 \equiv 6(\text{mod}10)$$

$$\Leftrightarrow n \equiv 3(\text{mod}10) \quad \text{ou} \quad n \equiv 5(\text{mod}10)$$

d) L'ensemble des entiers naturels , multiples de 10 inférieurs à 5 000, qui sont la somme des carrés de trois entiers consécutifs et correspondant à $n \in \{3;5;13;15;23;25;33;35\}$, est $\{50;110;590;770;1730;2030;3470;3890\}$.

Exercice 4 :

1. a) On a : $(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{DJ}) \equiv (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{JB})[2\pi] \equiv (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BJ})[2\pi] \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$

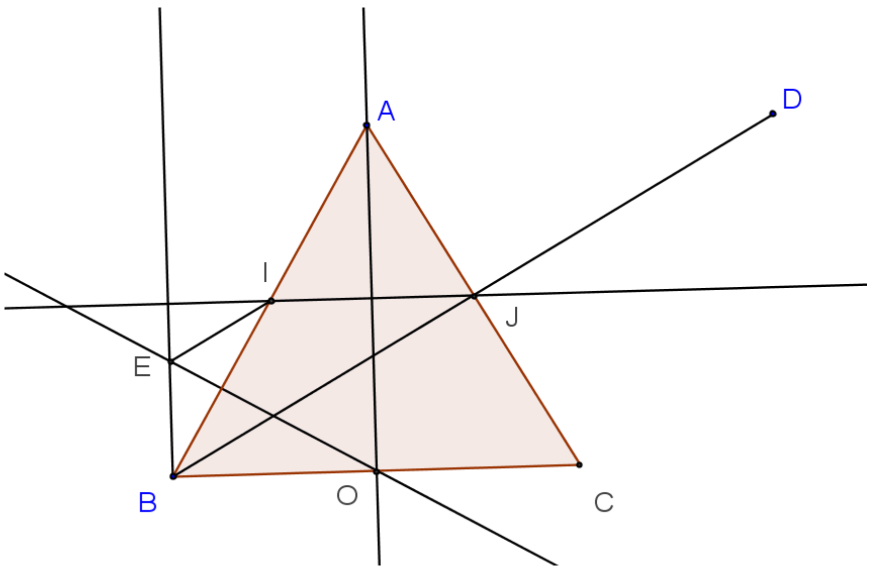
et $\frac{DJ}{AI} = \frac{BJ}{\frac{1}{2}AB} = BJ = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Donc f est d'angle $-\frac{\pi}{6}$ et de rapport $\sqrt{3}$.

b) On a : f(I) = J , $(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BJ}) \equiv (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BJ})[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$ et $\frac{BJ}{BI} = \frac{AB\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}AB} = \sqrt{3}$ donc B est le centre de f.

2. La droite (IC) es perpendiculaire à (IA) en I donc f((IC)) est le perpendiculaire à f((IA))= (DJ) en f(I) = J d'où f((IC))= (AC).

3.



a) Appliquons la formule d'Al Kashi dans le triangle BEI :

On a : f(E) = I équivaut à $BI = \sqrt{3}BE$ et $(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BI}) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$

$$EI^2 = BE^2 + BI^2 - 2BE.BI\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = BE^2 + 3BE^2 - 2BE.\sqrt{3}BE.\frac{\sqrt{3}}{2} = BE^2$$

D'où EI = EB et par suite le triangle IEB est isocèle en E.

On a : $\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BI}\right) + \left(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BC}\right)[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}[2\pi] = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Donc (BE) est perpendiculaire à (BC).

Or I est le milieu de [AB] et J le milieu de [AC] donc (IJ) est parallèle à (BC).

D'où (BE) et (IJ) sont perpendiculaires.

La médiatrice de [BI] et la perpendiculaire à la droite (BC) en B se coupent en E.

4. a) g(B) = $f \circ S_{(AB)}(B) = f(B) = B$; g(A) = $f \circ S_{(AB)}(A) = f(A) = D$.

b) g est la composée d'une similitude directe de rapport $\sqrt{3}$ et d'une similitude indirecte de rapport 1 donc g est une similitude indirecte de rapport $\sqrt{3}$.

Or g(B) = B alors B est le centre de g.

5. a) On a $z_B = -1$, l'écriture complexe de f est :

$$z' - z_B = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}(z - z_B) \Leftrightarrow z'+1 = \frac{3-i\sqrt{3}}{2}(z+1) \Leftrightarrow z' = \frac{3-i\sqrt{3}}{2}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$$

b) L'écriture complexe de g est : z' = $a\bar{z} + b$.

g(B) = B $\Leftrightarrow -1 = -a + b$.

On a $z_A = i\sqrt{3}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow z_D = z_C - z_B + z_A \Leftrightarrow z_D = 2 + i\sqrt{3}$

Il en résulte : g(A) = D $\Leftrightarrow 2 + i\sqrt{3} = -ai\sqrt{3} + b$

Résolvons dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ le système :

$$\begin{cases} -a+b=-1 \\ -ai\sqrt{3}+b = 2+i\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\left(1-i\sqrt{3}\right) = 2+i\sqrt{3} \\ b = a-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{\left(2+i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{4} \\ b = a-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = i\sqrt{3} \\ b = -1+i\sqrt{3} \end{cases}$$

L'écriture complexe de g est : $z' = i\sqrt{3}\bar{z} - 1 + i\sqrt{3}$

c) L'axe (Δ) de g est l'ensemble des points M(z) d'image M'(z') par g tel que $\overrightarrow{BM'} = \sqrt{3}\overrightarrow{BM}$

d'où $z'+1 = \sqrt{3}(z+1) \Leftrightarrow i\sqrt{3}\bar{z} + i\sqrt{3} = \sqrt{3}z + \sqrt{3}$.

Posons z = x + iy où x et y sont réels ,

$$i\sqrt{3}(x-iy) + i\sqrt{3} = \sqrt{3}(x+iy) + \sqrt{3} \Leftrightarrow y\sqrt{3} + i\left(x\sqrt{3} + \sqrt{3}\right) = x\sqrt{3} + \sqrt{3} + iy\sqrt{3}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y\sqrt{3} = x\sqrt{3} + \sqrt{3} \\ x\sqrt{3} + \sqrt{3} = y\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow y = x + 1$ donc $\Delta : y = x + 1$