Exercice 1 : (4 points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1. Démontrer le théorème suivant :
   Si k un réel non nul et Ω le point d'affixe ω, alors l'écriture complexe de l'homothétie h de centre Ω et de rapport k est $z' = kz + (1-k)\omega$.
2. On note A et B les points d'affixes respectives -1 et 1. Répondre par Vrai ou Faux aux propositions suivantes en justifiant la réponse.
   a) Si h est l'homothétie de centre A est de rapport $-\frac{2}{3}$ alors h est la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{2}{3}$ et d'angle π.
   b) Si h_1 est l'homothétie de centre A est de rapport $\frac{2}{3}$ et h_2 est l'homothétie de centre de centre B et de rapport $\frac{3}{2}$ alors $h_2 \circ h_1$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   c) Si f est l'homothétie de centre A est de rapport 3 et g est l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{5}$ alors $g \circ f$ est l'homothétie de rapport $\frac{3}{5}$ et de centre C d'affixe 3.

Exercice 2 : (5 points)

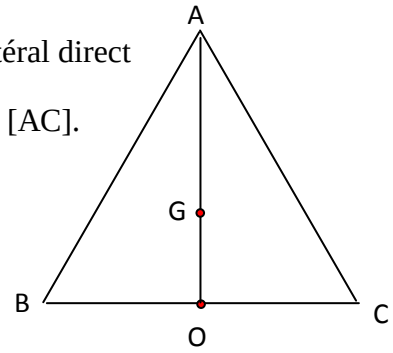
1. Recopier et compléter le tableau suivant :

a	3	5	7
Le reste de a^3 modulo 31			

2. a- Montrer que $7^{30} \equiv 1 (\text{mod } 31)$.
   b- Déduire de ce qui précède que le reste de la division euclidienne de 7^{2013} par 31 est 2.
3. Déterminer le reste modulo 31 du nombre $7^{2013} - 2\times 3^{2013} + 5^{2013}$.

Exercice 3 : (5 points)

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un triangle équilatéral direct ABC de centre G. On désigne par O le milieu de [BC] et par F celui de [AC].



Soit S la similitude directe qui transforme A en B et G en C.

1. a- Déterminer le rapport et un angle de S.
   b- Démontrer que F est le centre de S.

2. a- Déterminer la droite (Δ) image de (AB) par S.

b- Construire le point D image de B par S.

3. a- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de h = S ∘ S.

b- Exprimer $\overrightarrow{FD}$ en fonction de $\overrightarrow{FA}$.

Exercice 4 : (6 points)

On considère les fonctions f et F définie sur l'intervalle [0, 1[par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $F(x)=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

On donne ci-joint à la page 3-3, la courbe représentative (C) de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

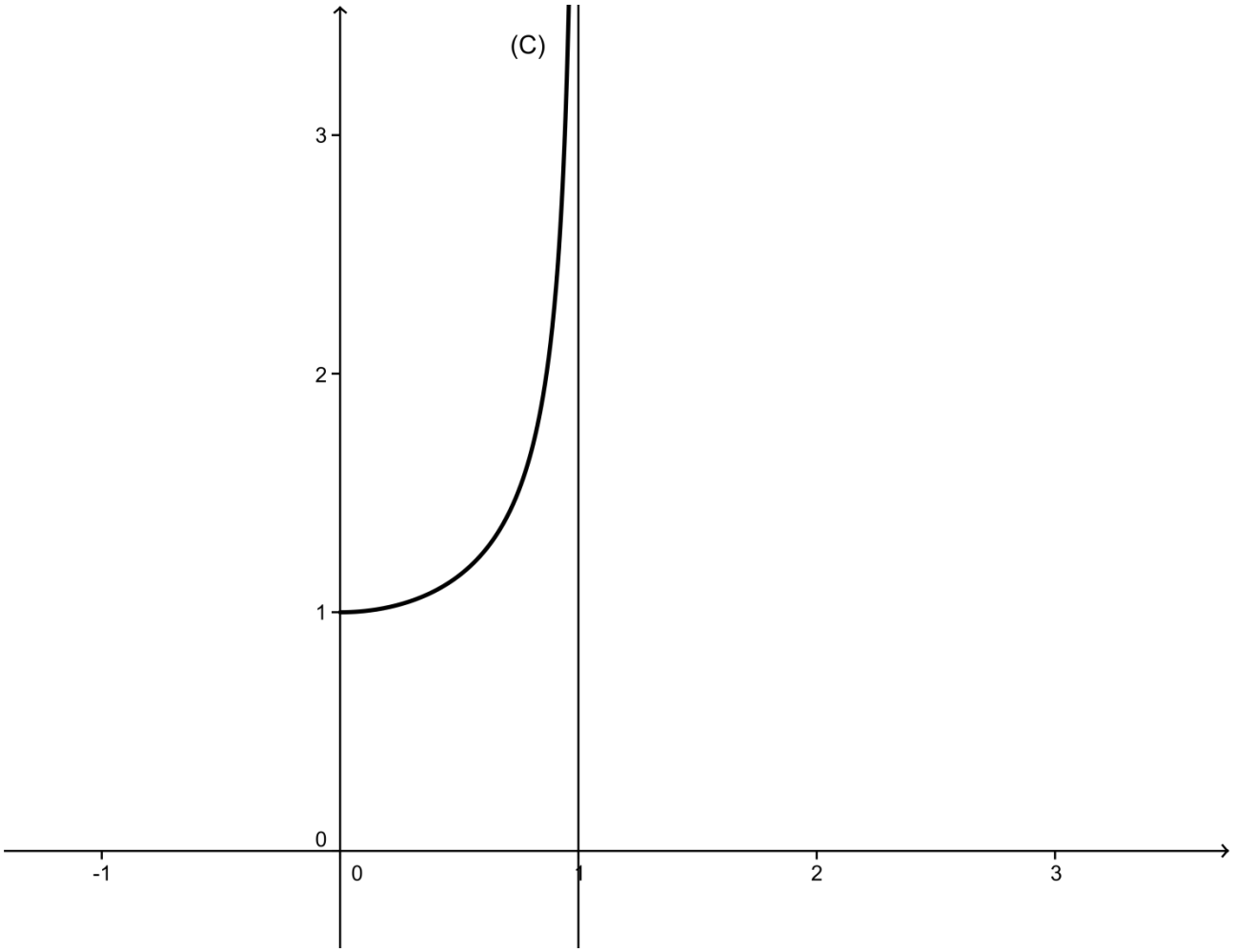
1. Soit G la fonction définie sur l'intervalle $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $G(x)=\int_0^{\sin x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.
   a) Montrer que G est dérivable sur I et calculer G'(x) pour tout x de I. En déduire G(x) pour tout x de I.
   b) Calculer l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = 0 et $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n\geq 1$, par $u_n=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}dt$.
   a) Vérifier que : $u_1=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   b) Montrer , à l'aide d'une intégration par parties, que : $u_2=-\frac{1}{2}+\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{1-t^2}dt$.
   En déduire que : $u_2=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$.
   c) Montrer que pour tout $n\geq 1$, $\frac{1}{(n+1)\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}\leq u_n\leq \frac{1}{(n+1)\left(\sqrt{2}\right)^{n}}$. En déduire que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

3. a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur intervalle J que l'on précisera. Tracer avec soin la courbe représentative (C') de f^{-1} sur l'annexe ci-joint.
   b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.
   c) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. On note A et B les points de la courbe représentative de f^{-1} d'abscisses respectives 1 et 2.
   Calculer le volume V engendré par rotation autour de l'axe des abscisses de l'arc AB .

Annexe à compléter et à rendre avec la copie

Nom de l'élève : ……



Corrigé

Exercice 1 :

1. h est l'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport k.
   Pour tout point M d'affixe z , on pose M' d'affixe z' tel que M' = h(M).
   $h(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow z'-\omega=k(z-\omega) \Leftrightarrow z'=k(z-\omega)+\omega \Leftrightarrow z'=kz+(1-k)\omega$.

Ainsi l'écriture complexe de h est : $z'=kz+(1-k)\omega$.

3. On note A et B les points d'affixes respectives -1 et 1. Répondre par Vrai ou Faux aux propositions suivantes en justifiant la réponse.

a) Vrai

En effet : Si h est l'homothétie de centre A est de rapport $-\frac{2}{3}$

alors $h=h_{\left(\Omega,\frac{2}{3}\right)}\circ h_{(\Omega,-1)}=h_{\left(\Omega,\frac{2}{3}\right)}\circ S_{\Omega}=h_{\left(\Omega,\frac{2}{3}\right)}\circ r_{(\Omega,\pi)}$

donc h est la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{2}{3}$ et d'angle π.

b) Faux.

En effet :

l'écriture complexe de h_1 l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$ est $z'=\frac{2}{3}z+\left(1-\frac{2}{3}\right)\times(-1)=\frac{2}{3}z-\frac{1}{3}$

l'écriture complexe de h_2 l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{3}{2}$ est $z'=\frac{3}{2}z+\left(1-\frac{3}{2}\right)\times 1=\frac{3}{2}z-\frac{1}{2}$

il en résulte que l'écriture complexe de $h_2\circ h_1$ est : $z'=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}z-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}=z-1$ donc $h_2\circ h_1$ est la translation de vecteur $-\vec{u}$.

c) Vrai

En effet :

l'écriture complexe de f l'homothétie de centre A et de rapport 3 est $z'=3z+(1-3)\times(-1)=3z+2$

l'écriture complexe de g l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{5}$ est $z'=\frac{1}{5}z+\left(1-\frac{1}{5}\right)\times 1=\frac{1}{5}z+\frac{4}{5}$

il en résulte que l'écriture complexe de $g\circ f$ est : $z'=\frac{1}{5}(3z+2)+\frac{4}{5}=\frac{3}{5}z+\frac{6}{5}$ donc $g\circ f$ est l'homothétie de rapport $\frac{3}{5}$ et de centre C d'affixe $\frac{\frac{6}{5}}{1-\frac{3}{5}}=\frac{6}{2}=3$.

Exercice 2 :

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

a	3	5	7
Le reste de a^3 modulo 31	27	1	2

2. a- 31 est un nombre premier et 31 ne divise pas 7 donc $7^{30}\equiv 1(\text{mod}\,31)$.

   b- On a $2013=67\times 30+3$ donc $7^{2013}\equiv 7^{67\times 30+3}(\text{mod}\,31)\equiv\left(7^{30}\right)^{67}\times 7^3(\text{mod}\,31)\equiv 2(\text{mod}\,31)$ d'où le reste de la division euclidienne de 7^{2013} par 31 est 2.

3. 31 est un nombre premier et 31 ne divise pas 3 donc $3^{30}\equiv 1(\text{mod}\,31)$.

   De même : 31 est un nombre premier et 31 ne divise pas 5 donc $5^{30}\equiv 1(\text{mod}\,31)$.

   Donc $3^{2013}\equiv 3^{67\times 30+3}(\text{mod}\,31)\equiv\left(3^{30}\right)^{67}\times 3^3(\text{mod}\,31)\equiv 1(\text{mod}\,31)$

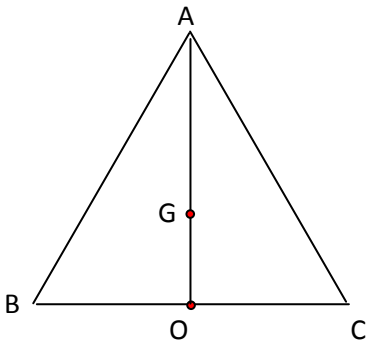
   Et $5^{2013}\equiv 5^{67\times 30+3}(\text{mod}\,31)\equiv\left(5^{30}\right)^{67}\times 5^3(\text{mod}\,31)\equiv 2(\text{mod}\,31)$

   Il ne résulte : $7^{2013}-2\times 3^{2013}+5^{2013}\equiv 2-2\times 1+2\ (\text{mod}\,31)\equiv 2\ (\text{mod}\,31)$.

   Par suite , le reste modulo 31 du nombre $7^{2013}-2\times 3^{2013}+5^{2013}$ est 2.

Exercice 3 :

Soit S la similitude directe qui transforme A en B et G en C.



1. a- $\dfrac{BC}{AG}=\dfrac{BC}{\frac{2}{3}AO}=\dfrac{BC}{\frac{2}{3}AB\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}$, $\left(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{BC}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{BO}\right)[2\pi]\equiv\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)[2\pi]\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

   Donc le rapport de S est $\sqrt{3}$ et son angle est $\dfrac{\pi}{2}$.

   b- Soit Ω le centre de S ,

   1e méthode :

   S(G) = C et S(A) = B, d'où $\left(\overrightarrow{\Omega G};\overrightarrow{\Omega C}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}(2\pi)$ et $\left(\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega B}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}(2\pi)$ donc Ω est le point d'intersection autre que O des deux cercles de diamètres respectifs [AB] et [GC] car $\left(\overrightarrow{OG},\overrightarrow{OC}\right)\equiv-\dfrac{\pi}{2}(2\pi)$, donc F est le centre de S.

   2e méthode :

   On a :

   d'une part S(A) = B et S(G) = C et d'autre part

$\frac{FB}{FA}=\frac{AC\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}AC}=\sqrt{3}$ et $\left(\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ $\frac{FC}{FG}=\frac{\frac{1}{2}AC}{\frac{1}{3}AC\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}$ et $\left(\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Donc F est le centre de S.

2.a- la droite (Δ) image de (AB) par S est la perpendiculaire à (AB) passant par S(A) = B

b- S(B) = D appartient à S((AB)) = Δ et S(B) = D implique $\left(\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc D appartient à (AC). Ainsi , D est le point d'intersection de Δ et (AC).

3.a- S ∘ S est la similitude de centre F et de rapport $\left(\sqrt{3}\right)^2=3$ et $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$, donc S ∘ S est l'homothétie de centre F et de rapport – 3.

b- S ∘ S(A) = S(B) = D donc $\overrightarrow{FD}=-3\overrightarrow{FA}$.

Exercice 4 :

On considère les fonctions f et F définie sur l'intervalle [0, 1[par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $F(x)=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

1. Soit G la fonction définie sur l'intervalle $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $G(x)=\int_0^{\sin x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

   a- La fonction $u: x\mapsto\sin x$ est dérivable sur I , pour tout x de I, $u(x)\in[0,1[$ et f est continue sur $[0,1[$ donc G est dérivable sur I et pour tout x de I, $G'(x)=\cos x.f(\sin x)=\cos x.\frac{1}{|\cos x|}=\frac{\cos x}{\cos x}=1$.

   De plus ,$G(0)=\int_0^0\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=0$, on en déduit que G est la primitive sur I de la fonction $t\mapsto 1$ qui s'annule en 0 d'où pour tout x de I , $G(x)=\int_0^x dt=x$.

   b- Calculer l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = 0 et $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ est égale à $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int_0^{\sin\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=G\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$.

2. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n\geq 1$, par $u_n=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

   a- $u_1=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt=\left[-\sqrt{1-t^2}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

   b- On a : $u_2=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

   On pose : f(t) = t ; f'(t) = 1

$$g'(t)=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \quad ; \quad g(t)=-\sqrt{1-t^2}$$

On obtient :

$$u_2=\left[-t\sqrt{1-t^2}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{1-t^2}dt=-\frac{1}{2}+\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{1-t^2}dt \ .$$

D'où $u_2=-\frac{1}{2}+\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{1-t^2}dt=-\frac{1}{2}+\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt=-\frac{1}{2}+\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt-u_2=-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}+u_2$

On en déduit : $2u_2=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\Leftrightarrow u_2=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$.

c- $0\le t\le\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow 0\le t^2\le\frac{1}{2}\Rightarrow -\frac{1}{2}\le -t^2\le 0\Rightarrow\frac{1}{2}\le 1-t^2\le 1\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\le\sqrt{1-t^2}\le 1\Rightarrow 1\le\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\le\sqrt{2}$.

Pour tout t de $\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et pour tout $n\ge 1$, $t^n\le\frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\le t^n\sqrt{2}$ donc

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}t^n dt\le\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}dt\le\sqrt{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}t^n dt\Leftrightarrow\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\le u_n\le\sqrt{2}\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Ainsi , pour tout $n\ge 1$, $\frac{1}{(n+1)\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}\le u_n\le\frac{1}{(n+1)\left(\sqrt{2}\right)^n}$.

Comme $\sqrt{2}>1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)\left(\sqrt{2}\right)^n=+\infty$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)\left(\sqrt{2}\right)^n}=0$; il en résulte que la suite (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

3. a- f est continue et strictement croissante sur I donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur intervalle J= f(I) = $\left[f(0),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[=[1,+\infty[$.

La courbe représentative (C') de f^{-1} est le symétrique de (C) par rapport à la droite $\Delta: y=x$.

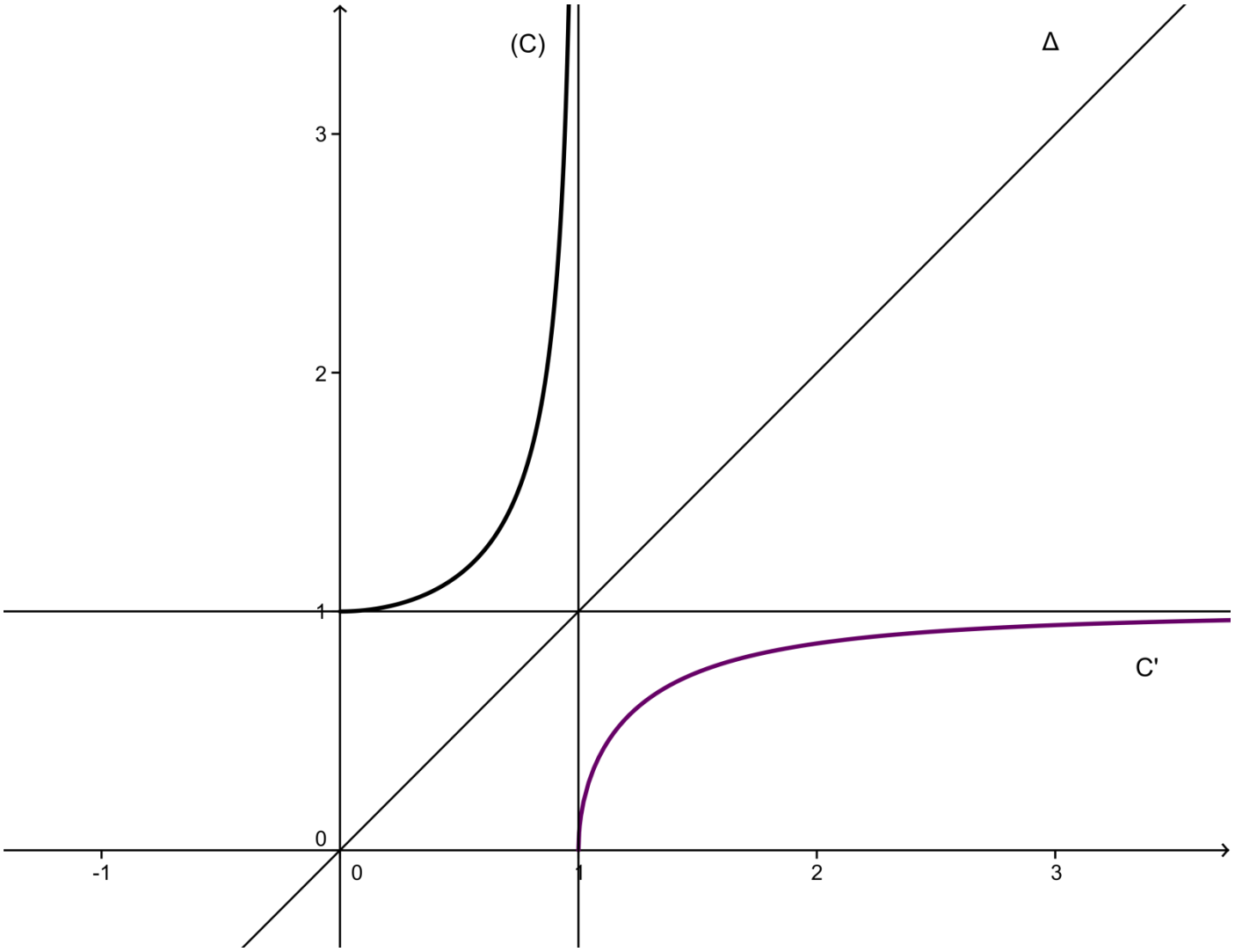
b- $\begin{cases}x\in I\\ y=f(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\in J\\ f^{-1}(y)=x\end{cases}$

$$f(x)=y\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=y\Leftrightarrow\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{y}\Leftrightarrow 1-x^2=\frac{1}{y^2}\Leftrightarrow x^2=1-\frac{1}{y^2}\Leftrightarrow|x|=\sqrt{\frac{y^2-1}{y^2}}$$

D'où $x=\sqrt{\frac{y^2-1}{y^2}}$. Ainsi , pour tout x de J, $f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}$.

c- Le volume V engendré par rotation autour de l'axe des abscisses de l'arc AB est

$$V=\pi\int_1^2\frac{x^2-1}{x^2}dx=\pi\int_1^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx=\pi\left[x+\frac{1}{x}\right]_1^2=\frac{\pi}{2} \ .$$


(C)
Δ
C'
3
2
1
0
-1
0
1
2
3