L. Ibn Khaldoun RADES	DEVOIR DE CONTROLE 1	$2^{ème}$ Sciences 3 Durée : 50 min
Mr ABIDI Farid	Mathématiques	09/10/2013

Exercice 1 (5 points)

Pour chacune des trois questions suivantes, une seule réponse est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. La justification est demandée.

1. Le réel $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$ vaut :

   a) 4 ; b) 1 ; c) $\dfrac{1}{4}$

2. $(\vec{i},\vec{j})$ est une base orthonormée et a est un réel . Les vecteurs $\vec{u}=(a+1)\vec{i}+a\vec{j}$ et $\vec{v}=a\vec{i}+(a-2)\vec{j}$ sont colinéaires équivaut à :

   a) $a=0$; b) -2 ; c) $a=0$ ou $a=\dfrac{1}{2}$

3. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sqrt{x+3}=\sqrt{2-x}$ est :

   a) $\varnothing$; b) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$; c) $\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

4. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $|1-3x|=3x-1$ est :

   a) $\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$; b) $\left[\dfrac{1}{3},+\infty\right[$; c) $\left]-\infty,\dfrac{1}{3}\right]$.

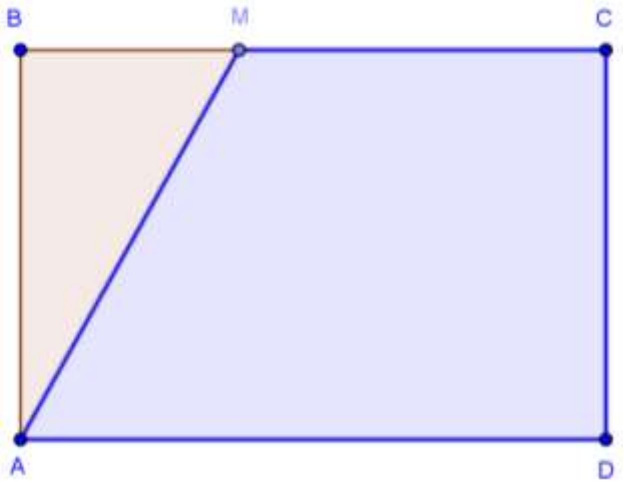
5. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\dfrac{1}{x-1}<\dfrac{1}{x+1}$ est :

   a) $]1,+\infty[$; b) $]-\infty,-1[$; c) $]-1,1[$

Exercice 2 (5 points)

L'unité de longueur est le centimètre.
ABCD est un rectangle tel que AB = 16 et AD = 24 ; M est un point du segment [BC].
On note , en cm², $\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABM et $\mathcal{A}'$ celle du trapèze AMCD.
On pose , BM = x où x appartient à [0, 24].

1. Exprimer en fonction de x l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABM et l'aire $\mathcal{A}'$ du trapèze AMCD.
2. On souhaite que l'aire $\mathcal{A}$ soit égale au cinquième de l'aire $\mathcal{A}'$.
   a) Ecrire l'équation d'inconnue x correspondant à cette demande.
   b) Résoudre cette équation.
   c) Calculer dans ces conditions , l'aire $\mathcal{A}$.



Voir la suite au verso

Exercice 3 (10 points)

Soit un rectangle ABCD de centre O. On donne AB = 2, AD = 1 et E milieu du segment [AB].

Soit F, G et H les points définis par $\overrightarrow{OF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AG} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

1. Démontrer que $\overrightarrow{HF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AO}$.

2. a) Montrer que $\overrightarrow{GH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

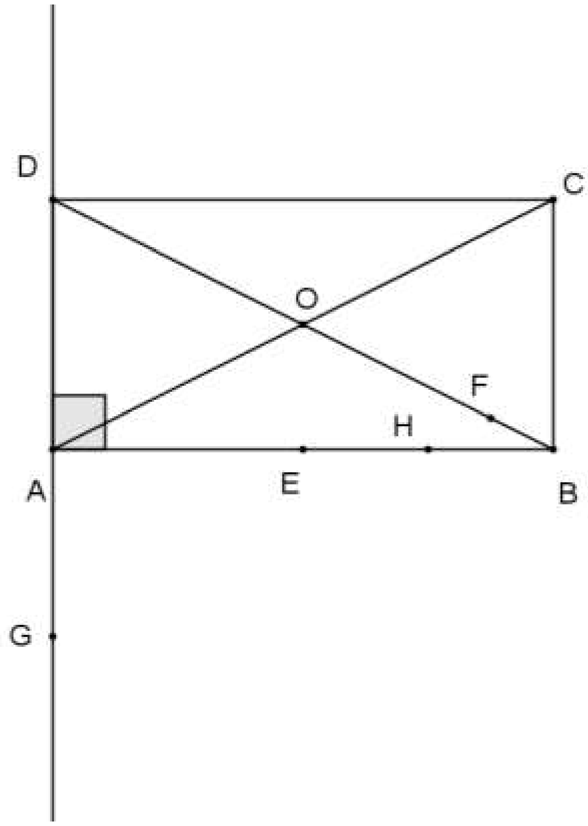
   b) En déduire que les points F, G et H sont alignés.

3. On choisit le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AD})$.

   a) Donner les coordonnées des points B, C , O, H et G puis montrer que $F\left(\frac{7}{4}, \frac{1}{8}\right)$.

   b) Soit K le symétrique de C par rapport à F, montrer que les coordonnées de K sont $\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$.

   c) Vérifier que $\overrightarrow{KH} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{KG} \perp \overrightarrow{AD}$



CORRIGE

Exercice 1

1. a

En effet : $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{4}{1}=4$ vaut :

2. b

Si les vecteurs $\vec{u}=(a+1)\vec{i}+a\vec{j}$ et $\vec{v}=a\vec{i}+(a-2)\vec{j}$ alors leur déterminant est

$$\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\begin{vmatrix} a+1 & a \\ a & a-2 \end{vmatrix}=(a+1)(a-2)-a^2=-a-2.$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à $-a-2=0$ équivaut à $a=2$

3. c

En effet : $\sqrt{x+3}=\sqrt{2-x}$ équivaut à $x+3\geq 0$ et $2-x\geq 0$ et $x+3=2-x$

équivaut à $x\geq -3$ et $x\leq 2$ et $2x=-1$ équivaut à $-3\leq x\leq 2$ et $x=-\dfrac{1}{2}$

Donc L'ensemble des solutions de cette équation est $\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

4. b

En effet : $|1-3x|=3x-1$ équivaut à $|3x-1|=3x-2$ équivaut à $3x-1\geq 0$ équivaut à $x\geq\dfrac{1}{3}$.

Donc l'ensemble des solutions de cette équation est $\left[\dfrac{1}{3},+\infty\right[$

5. c

En effet :

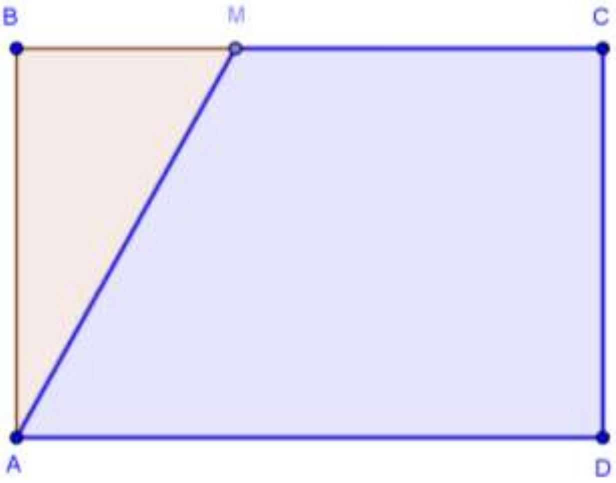
$\dfrac{1}{x-1}<\dfrac{1}{x+1}$ équivaut à $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}<0$ équivaut à $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}<0$.

Dressons le tableau de signe de (x - 1).(x + 1) :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x - 1		-		-	0	+	
x + 1		-	0	+		+	
(x - 1).(x + 1)		+	0	-	0	+	

Donc l'ensemble des solutions de cette inéquation est $]-1,1[$.

Exercice 2



1. $\mathcal{A} = \dfrac{AB.BM}{2} = \dfrac{16x}{2} = 8x$

et $\mathcal{A}' = \dfrac{AB.(AD+CM)}{2} = \dfrac{16(48-x)}{2} = 8(48-x)$

2. a) l'aire $\mathcal{A}$ soit égale au cinquième de l'aire $\mathcal{A}'$ équivaut à $8x = \dfrac{8}{5}(48 - x)$.

b) $8x = \dfrac{8}{5}(48 - x)$ équivaut à $5x = 48 - x$ équivaut à $6x = 48$ équivaut à $x = 8$

c) Pour $x = 8$, $\mathcal{A} = 64$.

Exercice 3

Soit un rectangle ABCD de centre O. On donne AB = 2, AD = 1 et E milieu du segment [AB].

Soit F, G et H les points définis par $\overrightarrow{OF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AG} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

1. $\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AO} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AO}$.

2. a) $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

b) On a : $\overrightarrow{HF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AO} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AC}$ d'où $\overrightarrow{AC} = 8\overrightarrow{HF}$. Or $\overrightarrow{GH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{GH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

Donc les points F, G et H sont alignés.

3. On choisit le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AD})$.

a) B(2, 0) , C(2, 1) , $O\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $H\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, $G\left(0, -\frac{3}{4}\right)$.

On a $\overrightarrow{OF}\begin{pmatrix} x_F - 1 \\ y_F - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Comme $\overrightarrow{OF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$ alors $\begin{cases} x_F - 1 = \frac{3}{4} \\ y_F - \frac{1}{2} = -\frac{3}{8} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x_F = \frac{7}{4} \\ y_F = \frac{1}{8} \end{cases}$

Donc $F\left(\frac{7}{4}, \frac{1}{8}\right)$.

b) K le symétrique de C par rapport à F équivaut à F est milieu de [CK]

équivaut à $\begin{cases} \frac{x_K + 2}{2} = \frac{7}{4} \\ \frac{y_K + 1}{2} = \frac{1}{8} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x_K = \frac{7}{2} - 2 \\ y_K = \frac{1}{4} - 1 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x_K = \frac{3}{2} \\ y_K = -\frac{3}{4} \end{cases}$.

D'où $K\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$.

c) $\overrightarrow{KH}\begin{pmatrix}0\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{KH}.\overrightarrow{AB}=0$ donc $\overrightarrow{KH}\perp\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{KG}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{KG}.\overrightarrow{AD}=0$ donc $\overrightarrow{KG}\perp\overrightarrow{AD}$.