Exercice 1 : **(4 points)**

I- Enoncer le théorème des accroissements finis.

II- Répondre par Vrai ou Faux aux propositions suivantes. Aucune justification n'est demandée.

1. Soit n un entier non nul et U un nombre complexe non nul. L'équation $z^n = U$ admet n solutions distinctes.

2. Si f est une fonction définie et change de signe sur un intervalle I, alors f s'annule sur I.

3. Si ψ est un antidéplacement tel que $\psi \circ \psi$ n'est pas l'identité du plan alors ψ est une symétrie glissante.

Exercice 2 : **(5 points)**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1,1[$ par $f(x) = -1 - \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

1. a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{-2}{\pi\left[(x+1)^2+1\right]}$.

2. On définit sur $]0,+\infty[$ la fonction g par $g(x) = f^{-1}(x-1) + f^{-1}\left(\frac{1}{x}-1\right)$.

a) Déterminer pour tout x > 0, $g'(x)$.

b) Calculer $g(1)$. En déduire que, pour tout x > 0, $g(x) = -1$.

3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(f^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + f^{-1}\left(-\frac{1}{k}\right)\right)$ et $v_n = \dfrac{u_n}{n}$.

a) Soit k un entier naturel non nul, donner $g\left(1+\frac{1}{k}\right)$. En déduire que, $f^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + f^{-1}\left(-\frac{1}{k+1}\right) = -1$.

b) Montrer que, pour tout entier n > 0, $u_n = -n - f^{-1}\left(\frac{-1}{n+1}\right)$.

c) En déduire que la suite (v_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice 3 : **(5 points)**

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation d'inconnue z :

$$(E): 2z^3 - (3+2i\sin 2\theta)z^2 + (1+2i\sin 2\theta)z - \frac{i}{2}\sin 2\theta = 0 \quad \text{où } \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

1. a) Vérifier que $\frac{1}{2}$ est une racine de (E).

b) Développer et réduire $\left(z-\frac{1}{2}\right)\left[2z^2 - 2(1+i\sin 2\theta)z + i\sin 2\theta\right]$.

c) Résoudre alors (E).

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A, M et N d'affixes respectives $\frac{1}{2}$, $\frac{1+e^{2i\theta}}{2}$ et $\frac{1-e^{-2i\theta}}{2}$.

a) Vérifier que A appartient à la médiatrice du segment [MN].

b) On appelle Ω le milieu du segment [MN]. Montrer que l'ensemble Δ des points Ω, lorsque θ décrit $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, est une partie d'une droite que l'on précisera.

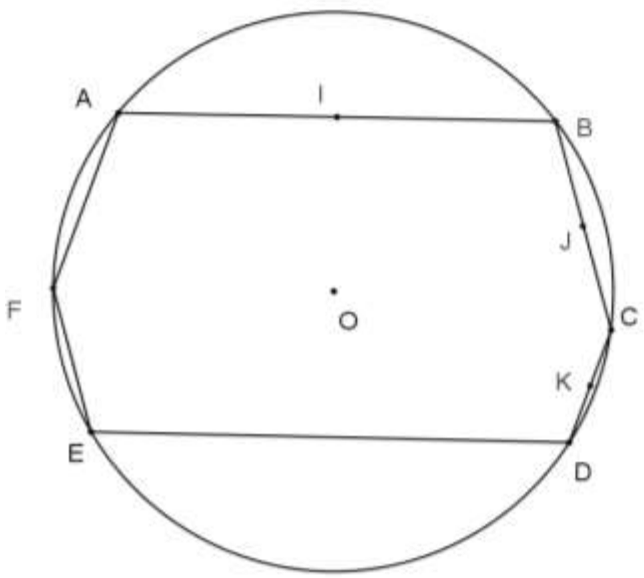
c) Préciser l'ensemble Γ des points M lorsque θ décrit $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. En déduire l'ensemble Γ' des points N lorsque θ décrit $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

d) Déterminer θ pour que le triangle AMN soit équilatéral.

Exercice 4 : (6 points)

Le plan est orienté. A, B, C, D, E et F sont six points d'un même cercle de centre O tels que (AB) // (ED) et (BC) //(EF). On note I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [BC] et [CD].

On désigne par r_1, r_2 et r_3 les applications suivantes : $r_1 = S_{(OJ)} \circ S_{(OI)}$, $r_2 = S_{(OI)} \circ S_{(OK)}$ et $r_3 = S_{(OJ)} \circ S_{(OK)}$.



1. a) Préciser la nature des applications r_1, r_2 et r_3.

   b) Montrer que $r_1 \circ r_2 = r_2 \circ r_1 = r_3$.

2. a) Déterminer $(r_2 \circ r_1)(A)$.

   b) En déduire que : $S_{(OJ)}\left(S_{(OK)}(A)\right) = E$.

3. a) Prouver alors que A et F sont symétriques par rapport à (OK).

   b) Montrer que (CD) // (AF).

4. On pose $\varphi_1 = S_{(OI)} \circ S_{(OJ)} \circ S_{(OK)}$.

Montrer que φ_1 est une symétrie orthogonale.

Préciser son axe.

5. Déterminer la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'application $\varphi_2 = S_{(AF)} \circ S_{(CD)} \circ S_{(OK)}$.