Activités algébriques

Activité 1 : Des situations...

1. Programmes

On considère les programmes de calcul suivants.

Programme A :

- Choisir un nombre ;
- Faire le produit de la différence du double du nombre et de 8 par la somme du nombre et de 3 ;
- Annoncer le résultat.

Programme B :

- Choisir un nombre ;
- Calculer son carré ;
- Lui soustraire la somme du nombre de départ et de 12 ;
- Multiplier le résultat par 2 ;
- Annoncer le résultat.

a. Teste ces deux programmes avec comme nombres de départ 4 ; − 1 et 1,6.

b. Quelle conjecture peux-tu faire ?

c. Démontre cette conjecture.

2. Impossible ?

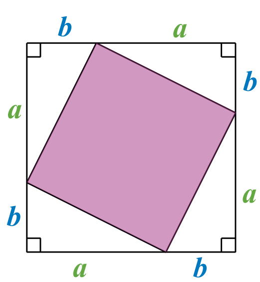
Calcule $34\,356\,786\,456 \times 34\,356\,786\,447 - 34\,356\,786\,451^2$.

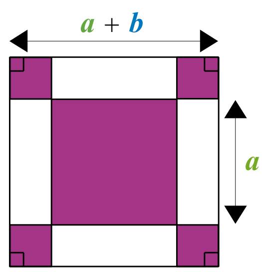
3. Arithmétique

Un entier relatif étant choisi, démontre la propriété suivante :

« Le produit de l'entier qui le précède par l'entier qui le suit, augmenté de 1 est un carré parfait. ».

4. Comparaison

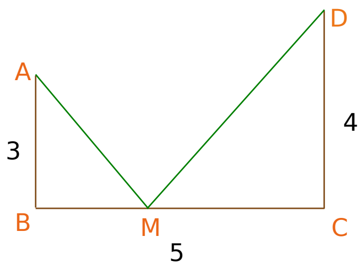




Les aires des surfaces coloriées sont-elles égales ? (a et b sont des nombres positifs.)

5. Inconnue

Calcule à quelle distance de B ou de C doit se trouver le point M sur le segment [BC] pour qu'il soit à égale distance de A et de D.



Activités algébriques

Activité 2 : Carré d'une somme, d'une différence

1. Carré d'une somme, somme des carrés

a. Calcule $(3 + 6)^2$ et $3^2 + 6^2$.
a et b étant deux nombres, les nombres $(a + b)^2$ et $a^2 + b^2$ sont-ils égaux ?

b. Pour plusieurs valeurs de a et b de ton choix, calcule la différence $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$.
Tu pourras utiliser un tableur.
Cette différence dépend-elle des valeurs que tu as choisies ? Si oui, précise comment.

2. Une identité remarquable : carré d'une somme

a. a et b étant des nombres quelconques, en utilisant $(a + b)^2 = (a + b) \times (a + b)$, développe et réduis $(a + b)^2$.

b. Une illustration géométrique : construis un carré.

Imagine un découpage de ce carré qui permettrait, en considérant a et b comme des longueurs de segments, de traduire l'égalité obtenue à la question précédente par une égalité d'aires.

3. Carré d'une différence, deuxième identité remarquable

a. a et b étant des nombres quelconques, développe et réduis $(a - b)^2$.

b. Construis un carré et en imaginant un découpage de ce carré, donne une interprétation géométrique de cette égalité.

Activité 3 : Produit d'une somme par une différence

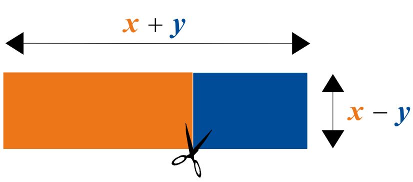
1. Avec des nombres

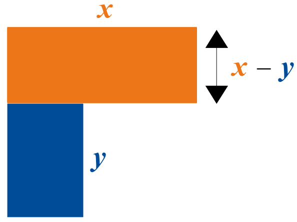
a. Développe $(1\,000 - 3)(1\,000 + 3)$. Que remarques-tu ?

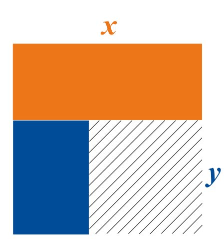
Déduis-en sans utiliser de calculatrice et sans avoir à poser de multiplication le résultat de $997 \times 1\,003$.

b. Calcule de la même façon 491×509.

2. Une illustration géométrique







x et y sont des nombres positifs et $x > y$.

Traduis cette succession de figures par une égalité. Justifie ta réponse.

3. Une identité remarquable de plus

a et b étant des nombres quelconques, développe et réduis $(a + b)(a - b)$.

Activités algébriques

Activité 4 : Calcul mental

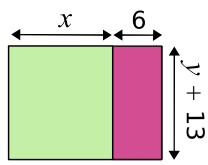
1. Lisa prétend que pour calculer mentalement 15^2, il suffit de faire $10^2 + 5^2$. Abdel, lui, dit qu'il faut rajouter 100 à ce que dit Lisa. Qui a raison ? Justifie ta réponse.

2. Calcule 54^2 sans avoir à poser de multiplication et sans utiliser de calculatrice mais en expliquant ta démarche.

3. En utilisant une identité remarquable, calcule mentalement 199^2. Explique ta démarche.

4. Julie affirme qu'elle peut comparer les quotients $\dfrac{999\,999}{1\,000\,000}$ et $\dfrac{1\,000\,000}{1\,000\,001}$ sans utiliser de calculatrice et sans poser de multiplication. Qu'en penses-tu ?

Activité 5 : Factorisations avec facteur commun



1. Un rectangle est divisé en deux comme le montre la figure ci-contre. Exprime son aire de deux manières différentes.

2. **Propriété**

Recopie et complète : $k \times a + k \times b = \ldots\ldots \times (\ldots\ldots + \ldots\ldots)$ $\quad k \times a - k \times b = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(k, a et b sont des nombres quelconques).

Quelle est la propriété utilisée ? Quelle action réalise-t-on ? Comment appelle-t-on k ?

3. Pour chacune des expressions suivantes et en utilisant la question précédente, indique quelle expression ou nombre peut jouer le rôle de k, quelles expressions ou nombres peuvent jouer le rôle de a et de b.

$A = 7x + 14$ (remarque : $14 = 7 \times 2$) ; $B = 8y + 7y$; $C = 6ab + 5a$; $D = 6m - 9m^2$;

$F = (7x + 5)(3x + 2) + (7x + 5)(x - 9)$; $G = (x - 4)(3x - 5) - (8x + 7)(3x - 5)$.

Transforme chacune de ces expressions en un produit de facteurs.

4. Écris l'expression $18x^2 + 6x$ sous la forme d'un produit dont un facteur est $6x$.

Activité 6 : D'autres factorisations

1. Voici trois expressions développées et réduites : $9x^2 - 4$; $9x^2 - 12x + 4$ et $9x^2 + 12x + 4$.
Voici les expressions factorisées correspondantes : $(3x + 2)^2$; $(3x + 2)(3x - 2)$ et $(3x - 2)^2$.

a. Sans développer, associe chaque forme réduite à sa forme factorisée en expliquant ta démarche.

b. Contrôle tes réponses précédentes en développant.

2. On considère les expressions : $25x^2 + 30x + 9$; $4x^2 - 9$ et $x^2 - 8x + 16$.

a. Indique pour chacune d'elles le « type » de l'identité remarquable dont elle peut être le développement : $(a + b)^2$; $(a - b)^2$ ou $(a + b)(a - b)$?

b. Identifie dans chaque cas qui peut « jouer les rôles » de a et de b puis factorise ces expressions. Vérifie tes réponses en développant.

Activités algébriques

Activité 7 : Produit nul

On se donne un nombre x et on cherche à évaluer les expressions suivantes :

$B = 3x(3x + 6)(x + 3)$ $\quad$ $C = (10x + 7)(x - 5)(x + 3)$ $\quad$ $D = (x + 3)(4x - 1)(x - 3)$

pour différentes valeurs de x et en particulier de trouver les valeurs de x qui rendent nulles ces expressions.

Valeurs de x	B	C	D
− 5			
− 4			
⋮			
4			
5			

1. En utilisant un tableur, programme les formules permettant de calculer B, C et D pour les valeurs entières de x comprises entre − 5 et 5.

2. À partir du tableau, donne des valeurs qui annulent B, C et D.

3. En insérant un graphique sous forme de courbe, que peux-tu dire du nombre de valeurs de x annulant B, C et D ?

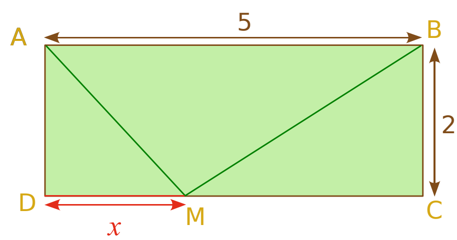
4. Pour aider à la recherche de toutes les valeurs annulant C et D, construis un nouveau tableau pour les valeurs de x comprises entre − 1 et 1 avec un pas de 0,1.

5. Donne toutes les valeurs annulant l'expression C.

6. As-tu trouvé toutes celles annulant D ? En construisant un dernier tableau, conclus.

7. En observant attentivement les expressions B, C et D, que remarques-tu sur les valeurs qui annulent chacune d'elles ? Que peux-tu en conclure ?

Activité 8 : Équation produit



On considère un rectangle ABCD tel que :

AB = 5 cm et BC = 2 cm.

M est un point qui se déplace sur [DC].

On pose DM = x.

Il s'agit de déterminer les valeurs de x pour lesquelles le triangle AMB sera rectangle en M.

1. Avec Tracenpoche

a. Réalise la figure, M devant être un point du segment [DC].
En faisant afficher la longueur DM et la mesure de l'angle $\widehat{AMB}$ et en déplaçant le point M, détermine une (ou des) valeur(s) possible(s) de x.

b. Trouve une construction géométrique d'un point M appartenant à [DC] tel que AMD soit rectangle en M et déduis-en une condition sur la longueur de [BC] pour l'existence de M.

2. Résolution algébrique

a. À quelle condition sur les longueurs le triangle AMB est-il rectangle en M ?

b. Dans le triangle ADM, exprime AM^2 en fonction de x. Puis dans le triangle BMC, exprime BM^2 en fonction de x.

c. Traduis alors par une équation la condition vue dans le **a.** et montre que cette équation peut s'écrire $2x^2 - 10x + 8 = 0$.

d. Développe $P = 2(x - 1)(x - 4)$

e. Déduis-en une nouvelle écriture de l'équation vue au **c.** et résous alors cette équation.

Méthode 1 : Développer avec les identités remarquables

À connaître

Pour tous nombres a et b,
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Exemple 1 : Développe et réduis l'expression $(x + 3)^2$.

On utilise l'identité $(a + b)^2$ avec $a = \mathbf{x}$ et $b = \mathbf{3}$.

$(\mathbf{x} + \mathbf{3})^2 = \mathbf{x}^2 + 2 \times \mathbf{x} \times \mathbf{3} + \mathbf{3}^2$ ⟶ On remplace a par $\mathbf{x}$ et b par $\mathbf{3}$ dans $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ ⟶ On réduit l'expression obtenue.

Exemple 2 : Développe et réduis l'expression $(x - 4)^2$.

On utilise l'identité $(a - b)^2$ avec $a = \mathbf{x}$ et $b = \mathbf{4}$.

$(\mathbf{x} - \mathbf{4})^2 = \mathbf{x}^2 - 2 \times \mathbf{x} \times \mathbf{4} + \mathbf{4}^2$ ⟶ On remplace a par $\mathbf{x}$ et b par $\mathbf{4}$ dans $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Attention, le double produit n'est pas précédé du même signe que les deux carrés.

$(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$ ⟶ On réduit l'expression obtenue.

Exemple 3 : Développe et réduis l'expression $(3x - 5)^2$.

On utilise l'expression $(a - b)^2$ avec $a = \mathbf{3x}$ et $b = \mathbf{5}$.

$(\mathbf{3x} - \mathbf{5})^2 = (\mathbf{3x})^2 - 2 \times \mathbf{3x} \times \mathbf{5} + \mathbf{5}^2$ ⟶ On remplace a par $\mathbf{3x}$ et b par $\mathbf{5}$ dans $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Attention ! $a = \mathbf{3x}$ donc $a^2 = (\mathbf{3x})^2 = \mathbf{3}^2 \times \mathbf{x}^2 = \mathbf{9x}^2$.

$(3x - 5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$ ⟶ On réduit l'expression obtenue.

Exemple 4 : Développe et réduis l'expression $(7x + 2)(7x - 2)$.

On utilise l'expression $(a + b)(a - b)$ avec $a = \mathbf{7x}$ et $b = \mathbf{2}$.

$(\mathbf{7x} + \mathbf{2})(\mathbf{7x} - \mathbf{2}) = (\mathbf{7x})^2 - \mathbf{2}^2$ ⟶ On remplace a par $\mathbf{7x}$ et b par $\mathbf{2}$ dans $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

$(7x + 2)(7x - 2) = 49x^2 - 4$ ⟶ On réduit l'expression obtenue.

À toi de jouer

1 Développe et réduis les expressions suivantes.

$A = (x + 6)^2$ $B = (x - y)^2$ $C = (3a + 1)^2$

$D = (6x - 5)^2$ $E = (z + 3)(z - 3)$ $F = (4x + 7y)(4x - 7y)$

2 Calcule en utilisant les identités remarquables et sans calculatrice.

a. 101^2 **b.** 99^2 **c.** 101×99

3 Recopie puis complète les expressions suivantes.

$A = (x + ...)^2 = ... + 2 \times .... \times .... + 25$ $B = (.... - 9)^2 = 4x^2 - .... \times .... \times .... + ...$

$C = (3x + ...)(.... - ....) = ... - 64$ $D = (5x - ....)^2 = ... - .... + 16$

Méthode 2 : Factoriser avec un facteur commun

À connaître

Pour tous nombres a, b et k, on a $k \times a + k \times b = k \times (a + b)$.

Exemple 1 : Fais apparaître un facteur commun dans l'expression $A = 3y + 21$ puis factorise.

$A = 3 \times y + 3 \times 7$ → On repère un facteur commun.

$A = 3(y + 7)$ → On factorise.

Exemple 2 : Factorise l'expression $B = 2x + xy$.

$B = 2 \times x + x \times y$ → On repère un facteur commun.

$B = x(2 + y)$ → On factorise.

Exemple 3 : Factorise l'expression $C = (2x + 5)(3x + 7) + (2x + 5)(6x + 1)$.

$C = (2x + 5)(3x + 7) + (2x + 5)(6x + 1)$ → On repère un facteur commun.

$C = (2x + 5)[(3x + 7) + (6x + 1)]$ → On factorise.

$C = (2x + 5)(9x + 8)$ → On réduit l'expression à l'intérieur des crochets.

Exemple 4 : Factorise l'expression $D = (9x - 4)(5x + 6) - (9x - 4)(3x + 11)$.

$D = (9x - 4)(5x + 6) - (9x - 4)(3x + 11)$ → On repère un facteur commun.

$D = (9x - 4)[(5x + 6) - (3x + 11)]$ → On factorise.

$D = (9x - 4)[5x + 6 - 3x - 11]$ → On supprime les parenthèses à l'intérieur des crochets en faisant attention au signe « – ».

$D = (9x - 4)(2x - 5)$ → On réduit l'expression à l'intérieur des crochets.

Exemple 5 : Factorise l'expression $E = (5x - 7)(9x - 2) - (5x - 7)^2$.

$E = (5x - 7)(9x - 2) - (5x - 7)(5x - 7)$ → On repère un facteur commun.

$E = (5x - 7)[(9x - 2) - (5x - 7)]$ → On factorise.

$E = (5x - 7)[9x - 2 - 5x + 7]$ → On supprime les parenthèses à l'intérieur des crochets en faisant attention au signe « – ».

$E = (5x - 7)(4x + 5)$ → On réduit l'expression à l'intérieur des crochets.

À toi de jouer

4 Écris chacune des expressions suivantes sous la forme $a(x + 7)$.

$F = 4x + 28$ $\qquad G = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{14}{3}$ $\qquad H = 0{,}5x + 3{,}5$ $\qquad I = -5x - 35$

5 Factorise au maximum les expressions suivantes.

$J = 10x - 8$ $\qquad K = 6y^5 - 8y^2$ $\qquad L = 3x^2 + 4x$ $\qquad M = (x + 2)(x - 4) + (x + 2)(x - 5)$

Méthode 3 : Factoriser avec les identités remarquables

À connaître

Pour tous nombres a et b,
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$; $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$; $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Exemple 1 : Factorise l'expression $A = x^2 + 6x + 9$.

$A = x^2 + 6x + 9$ ⟶ On observe trois termes précédés du signe $+$.

$A = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2$ ⟶ On met en évidence l'identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ avec $a = x$ et $b = 3$.

$A = (x + 3)^2$ ⟶ On remplace a par x et b par 3 dans $(a + b)^2$.

Exemple 2 : Factorise l'expression $B = 25x^2 - 20x + 4$.

$B = 25x^2 - 20x + 4$ ⟶ On observe trois termes et des signes différents.

$B = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 2 + 2^2$ ⟶ On met en évidence l'identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ avec $a = 5x$ et $b = 2$.

$B = (5x - 2)^2$ ⟶ On remplace a par $5x$ et b par 2 dans $(a - b)^2$.

Exemple 3 : Factorise l'expression $C = 64x^2 - 49$.

$C = 64x^2 - 49$ ⟶ On observe la différence de deux carrés.

$C = (8x)^2 - 7^2$ ⟶ On met en évidence l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ avec $a = 8x$ et $b = 7$.

$C = (8x + 7)(8x - 7)$ ⟶ On remplace a par $8x$ et b par 7 dans $(a + b)(a - b)$.

À toi de jouer

6 Factorise les expressions suivantes en utilisant une identité remarquable.

$D = 16x^2 + 24x + 9$ $E = 49x^2 - 70x + 25$ $F = x^2 - 81$

Méthode 4 : Résoudre une équation produit

Exemple : Résous l'équation $(x + 3)(x - 7) = 0$.

Si un produit est nul alors l'un de ses facteurs au moins est nul.
On en déduit que :

$x + 3 = 0$	ou	$x - 7 = 0$
$x = -3$	ou	$x = 7$

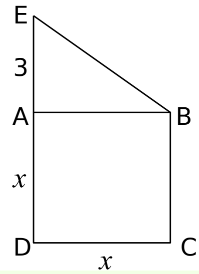
On teste les valeurs trouvées.
Pour $x = -3$: $(x + 3)(x - 7) = (-3 + 3)(-3 - 7) = 0 \times (-10) = 0$.
Pour $x = 7$: $(x + 3)(x - 7) = (7 + 3)(7 - 7) = 10 \times 0 = 0$.
Les solutions de l'équation produit $(x + 3)(x - 7) = 0$ sont -3 et 7.

À toi de jouer

7 Résous les équations produit suivantes.

a. $(x - 4)(x + 9) = 0$ **b.** $(4x - 1)(9x - 2) = 0$ **c.** $(3x + 2)^2 = 0$

Méthode 5 : Mettre un problème en équation



Exemple : Sur le schéma, ABCD est un carré de côté x cm et ABE est un triangle rectangle en A tel que AE = 3 cm et AB = x cm.

Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire du carré ABCD est-elle égale à l'aire du triangle rectangle ABE ?

Étape n°1 : Choisir l'inconnue

Soit x la mesure du côté du carré ABCD.

On repère la grandeur inconnue parmi celles exprimées dans l'énoncé. On la note x.

Étape n°2 : Mettre en équation

$A_{ABCD} = AB \times AD$
$A_{ABCD} = x \times x = x^2$

$A_{ABE} = AB \times AE \div 2$
$A_{ABE} = x \times 3 \div 2 = 1{,}5x$

On exprime les informations données dans l'énoncé en fonction de x.

Le nombre cherché vérifie donc l'équation :

$$x^2 = 1{,}5x$$

La phrase de l'énoncé se traduit donc par l'égalité ci-contre.

Étape n°3 : Résoudre l'équation

Pour résoudre l'équation, on se ramène à une équation produit nulle.

$$x^2 - \mathbf{1{,}5x} = 1{,}5x - \mathbf{1{,}5x}$$
$$x^2 - 1{,}5x = 0$$

On élimine les termes en x dans le membre de droite.

$$\mathbf{x} \times x - 1{,}5\mathbf{x} = 0$$
$$\mathbf{x}(x - 1{,}5) = 0$$

On factorise pour se ramener à une équation produit.

Si un produit est nul alors l'un de ses facteurs au moins est nul.

$x = 0$ ou $x - 1{,}5 = 0$
$x = 0$ ou $x = 1{,}5$

On résout l'équation produit.

Étape n°4 : Vérifier que les valeurs trouvées sont solutions du problème

On teste les valeurs trouvées.
Pour $x = 0$: $x^2 = 0$ et $1{,}5x = 0$.
Pour $x = 1{,}5$: $x^2 = 1{,}5^2 = 2{,}25$
et $1{,}5x = 1{,}5 \times 1{,}5 = 2{,}25$.

On vérifie que les valeurs trouvées répondent à la question.

Étape n° 5 : Conclure

Comme x est un nombre strictement positif, la solution 0 ne convient pas à ce problème.
La solution du problème est donc 1,5 cm.

On conclut.

À toi de jouer

8 Trouve la (ou les) valeur(s) de x pour qu'un parallélogramme de base $4x - 5$ et de hauteur 1 et un rectangle de longueur $(3x + 1)$ et de largeur $(4x - 5)$ aient la même aire.