Activités numériques

Activité 1 : Multiple, diviseur

1. Le jeu de Juniper-Green

Règle du jeu : Ce jeu se joue à deux (ou plus) avec les nombres entiers de 1 à 40.
Le premier joueur choisit un nombre entier.
Le deuxième joueur doit alors en choisir un autre qui doit être soit multiple, soit diviseur de ce premier nombre et toujours parmi les nombres entiers de 1 à 40.
Le joueur suivant en choisit encore un autre qui doit être soit multiple, soit diviseur du second nombre. Et ainsi de suite, chaque nombre ne pouvant servir qu'une seule fois !
Le dernier joueur qui a pu choisir un nombre a gagné !

a. Jouez à ce jeu, en alternant le premier joueur.

b. Le premier joueur prend 40 comme nombre de départ. Quelle est la liste des nombres possibles pour le second joueur ? Même question avec 17 ; 9 et 23.

c. Dans une partie à deux joueurs, quel nombre peut choisir le premier joueur pour être sûr de l'emporter (s'il joue bien !) ? Trouve toutes les possibilités.

2. Liste des diviseurs

Écris 54 comme un produit de deux entiers. Trouve toutes les possibilités.
Quelle est la liste des diviseurs de 54 ?
Trouve la liste des diviseurs de 720 (il y en a 30 !) et celle des diviseurs de 53.

3. Réponds aux questions suivantes en justifiant chaque réponse.
La somme de trois entiers consécutifs est-elle un multiple de 3 ?
Que peut-on dire de celle de cinq entiers consécutifs ?
La somme de n entiers consécutifs est-elle un multiple de n (n est un entier naturel) ?

Activité 2 : Division euclidienne

1. On veut partager équitablement un lot de 357 CD entre 12 personnes. Combien de CD aura chaque personne ? Combien de CD restera-t-il après le partage ?

2. Pose la division euclidienne de 631 par 17 puis écris 631 sous la forme $17 \times k + n$ où k et n sont des entiers naturels et $n < 17$.
Dans cette opération, comment s'appellent les nombres 631 ; 17 ; k et n ?

3. On considère l'égalité suivante : $983 = 45 \times 21 + 38$.
Utilise-la pour répondre aux questions suivantes, en justifiant et sans effectuer de division.

a. Quels sont le quotient et le reste de la division euclidienne de 983 par 45 ? Par 21 ?

b. Quels sont le quotient et le reste de la division euclidienne de 990 par 45 ? De 953 par 21 ?

4. Que peux-tu dire du reste de la division euclidienne d'un multiple de 32 par 32 ?
Effectue la division euclidienne de 76 075 par 85. Que peux-tu en déduire ?

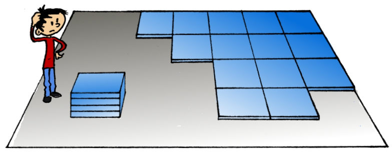
5. Histoires de restes, toujours...

a. Le reste dans la division euclidienne de m par 7 est 4 (m est un entier naturel). Quelles valeurs peut prendre m ? Quelle forme a-t-il ?

b. Explique pourquoi tout nombre entier naturel peut s'écrire sous la forme $13k + p$ où k et p sont des entiers avec p compris entre 0 et 12.

Activités numériques

Activité 3 : Diviseurs communs, PGCD



1. On veut paver une surface rectangulaire avec des carrés identiques et sans coupe. La longueur du côté des carrés est un nombre entier de centimètres.

a. La surface rectangulaire mesure 12 cm par 18 cm.
Quelle peut être la longueur du côté des carrés ? Y a-t-il plusieurs possibilités ? Que représente(nt) ce(s) nombre(s) pour 12 et 18 ?
Mêmes questions lorsque la surface rectangulaire mesure 49 cm par 63 cm, puis 27 cm par 32 cm et enfin 21 cm par 84 cm.

b. Cherche les dimensions maximales d'un carré pouvant paver une surface rectangulaire de 108 cm par 196 cm.

2. Un challenge sportif regroupe 105 filles et 175 garçons. Les organisateurs souhaitent composer des équipes comportant toutes le même nombre de filles et le même nombre de garçons.
Comment peux-tu les aider pour qu'ils puissent constituer un nombre maximal d'équipes ? Donne ensuite le nombre de filles et de garçons dans chaque équipe. Explique ta démarche.

3. PGCD

a. Dresse la liste des diviseurs de 117 et celle des diviseurs de 273.
Quel est le plus grand diviseur commun à ces deux nombres ?

On appelle ce nombre le PGCD de 117 et 273 et on le note : PGCD (117 ; 273) ou PGCD (273 ; 117).

b. Quel est le PGCD de 14 et 42 ? Essaie de trouver pourquoi et généralise à deux entiers naturels a et b.

Activité 4 : Vers la méthode des soustractions successives

1. Somme et différence de multiples

a. Sans faire de division, explique pourquoi 49 014 est un multiple de 7 et pourquoi 13 est un diviseur de 12 987.

b. Démontre la propriété suivante :

« Si d est un diviseur commun à deux entiers naturels a et b avec $a > b$ alors d est également un diviseur de $a + b$ et de $a - b$. ».

2. Vers la méthode des soustractions successives

a. Détermine le PGCD de 75 et 55 puis celui de 55 et 75 − 55.
Recommence avec celui de 91 et 130 et celui de 91 et 130 − 91.
Que peux-tu conjecturer ? Si cette conjecture est vraie, quel est son intérêt ?

b. La preuve

Soient a et b deux entiers naturels avec $a > b$. Soit d le PGCD de a et b et d' le PGCD de b et $a - b$.

- En utilisant la propriété vue au **1.**, explique pourquoi $d \leqslant d'$.
- Montre que d' est à la fois un diviseur de b, de $a - b$ et de a. Compare d et d'.
- Conclus.

c. Trouve le PGCD de 2 724 et 714 en utilisant plusieurs fois la propriété précédente.

Activités numériques

Activité 5 : Vers une nouvelle méthode

1. Le plus grand diviseur commun à 2 208 et 216 en un minimum d'étapes

a. Calcule le PGCD de 2 208 et 216 avec la méthode des soustractions successives.

b. Combien de fois as-tu soustrait 216 ? Quel est le nombre obtenu après avoir fini de soustraire 216 ? Comment aurais-tu pu prévoir cela ?

c. Déduis-en que l'on peut trouver, à l'aide d'une seule opération, un entier naturel n tel que : PGCD (2 208 ; 216) = PGCD (216 ; n) avec $n < 216$.
Que représente alors n pour cette opération ?

d. Récris le calcul du PGCD de 2 208 et 216 en utilisant un minimum d'opérations.

2. Recopie et complète la propriété utilisée précédemment (cette propriété sera admise) :
« Soit a et b deux entiers naturels avec $a \geqslant b$.
Le PGCD de a et b est égal au PGCD de b et de r où r est ... . ».

3. Trouve le PGCD de 1 639 et 176 en utilisant plusieurs fois cette propriété.
Combien y a-t-il d'étapes en utilisant la méthode des soustractions successives ?

Activité 6 : Avec un tableur : PGCD de deux nombres

Introduction : pourquoi les méthodes pour trouver un PGCD vues dans les activités précédentes peuvent-elles aussi prendre le nom d'**algorithmes** ?

1. Algorithme des différences

On veut programmer avec un tableur la recherche du PGCD de 672 et de 210 en utilisant la propriété :

	A	B	C
1	a	b	$a-b$
2	672	210	
3			

« a et b étant deux entiers naturels tel que $a \geqslant b$, on a PGCD (a ; b) = PGCD (b ; $a - b$). ».

a. Quelle fonction du tableur doit-on utiliser pour obtenir en A3 le plus grand des deux nombres qui sont en B2 et C2 ? Quelle fonction du tableur doit-on utiliser pour obtenir cette fois-ci en B3 le plus petit des deux nombres qui sont en B2 et C2 ?

b. Poursuis la programmation et trouve ainsi le PGCD de 672 et de 210.
À partir de quel moment es-tu sûr d'avoir trouvé le PGCD ?

2. Algorithme d'Euclide

On veut maintenant programmer la recherche du PGCD de 672 et de 210 en utilisant la propriété :

	A	B	C
1	a	b	r
2	672	210	
3			

« a et b étant deux entiers naturels tel que $a \geqslant b$, r étant le reste de la division euclidienne de a par b, on a PGCD (a ; b) = PGCD (b ; r). ».

a. Écris 672 sous la forme $210q + r$ où q et r sont des entiers naturels et $r < 210$.
Écris dans C2 la formule permettant de calculer r.

b. Poursuis la programmation et trouve ainsi le PGCD de 672 et de 210.
À partir de quel moment es-tu sûr d'avoir trouvé le PGCD ?

3. Copie les deux programmes précédents dans une même feuille de calcul, à côté l'un de l'autre et utilise-les simultanément pour déterminer le PGCD de 5 432 et de 3 894.
Quelle remarque peux-tu faire ?

Activités numériques

Activité 7 : Simplification de fractions

1. Voici une liste de fractions :

$$\frac{130}{150} \ ; \ \frac{26}{30} \ ; \ \frac{42}{49} \ ; \ \frac{148}{164} \ ; \ \frac{91}{105} \ ; \ \frac{156}{180} \ ; \ \frac{39}{45} \ ; \ \frac{52}{60}.$$

a. Chasse les intrus de cette liste. Justifie ta réponse.

b. Quelle fraction, ayant un numérateur et un dénominateur les plus petits possibles, peut-on rajouter à la liste des fractions restantes ?

c. Quel est le PGCD du numérateur et du dénominateur de la fraction trouvée dans la question **b.** ?
On dit que ces deux entiers sont **premiers entre eux** et que la fraction est **irréductible**.

d. Le numérateur et le dénominateur de chacune des autres fractions restantes sont-ils premiers entre eux ? Justifie ta réponse.

2. Pour simplifier la fraction $\frac{84}{126}$, Malik a remarqué que $84 = 2^2 \times 3 \times 7$.

a. Quelle particularité ont les facteurs 2, 3 et 7 entrant dans la décomposition de 84 ?

b. Décompose 126 suivant le même principe puis simplifie la fraction pour la rendre irréductible. Comment peux-tu être sûr d'avoir obtenu une fraction irréductible ?

c. Recopie et complète : $\frac{... \times 5 \times 7 \times ...}{3^2 \times ....} = \frac{11}{35}$.

3. On donne les fractions suivantes : $\frac{256}{243} \ ; \ \frac{1\,020}{1\,989} \ ; \ \frac{382}{426} \ ; \ \frac{313}{255}$.

a. Quelles sont les fractions irréductibles ? Justifie.

b. Écris les autres fractions sous forme irréductible à l'aide d'une seule simplification.

c. Soient a et b deux entiers naturels et d leur PGCD.

- Démontre que $\frac{a}{d}$ et $\frac{b}{d}$ sont des entiers premiers entre eux.
- Déduis-en que $\frac{a \div d}{b \div d}$ est une fraction irréductible.

Activité 8 : Le point sur les nombres

Voici une liste de nombres :

$$-27{,}2 \ ; \ \frac{10\,371}{100} \ ; \ \frac{27}{13} \ ; \ \frac{3}{2} \ ; \ -\frac{21}{15} \ ; \ \pi \ ; \ -\frac{10}{5} \ ; \ \frac{47}{21} \ ; \ -15 \ ; \ -\frac{10}{3} \ ; \ 37.$$

a. Dans cette liste, quels sont les nombres entiers ? Quels sont les nombres décimaux ?

b. Y a-t-il des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous forme décimale ? Lesquels ?

c. Y a-t-il des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous forme fractionnaire ? Lesquels ?

Méthode 1 : Maîtriser le vocabulaire

À connaître

a et b sont deux entiers naturels non nuls tels que $a = b \times k$ (ou $a \div b = k$) où k est un entier naturel. On dit que :
a est un multiple de b ou a est divisible par b ou b est un diviseur de a ou b divise a.

Remarque : L'entier naturel k est aussi un diviseur de a (k divise aussi a, a est aussi un multiple de k et a est aussi divisible par k).

Exemple 1 : 1 274 est-il un multiple de 49 ? 1 974 est-il divisible par 84 ?

1 274 ÷ 49 = 26 donc 1 274 = 49 × 26.
1 274 est donc un multiple de 49 (et de 26). On dit également que 1 274 est divisible par 49 (et par 26), que 49 est un diviseur de 1 274 (26 l'est aussi) ou que 49 divise 1 274 (26 divise aussi 1 274).

1 974 ÷ 84 = 23,5.
23,5 n'est pas un entier naturel, 1 974 n'est donc pas divisible par 84.
On peut dire également que 84 n'est pas un diviseur de 1 974 et que 1 974 n'est pas un multiple de 84.

Exemple 2 : Établis la liste de tous les diviseurs de 198.

Pour cela, on cherche tous les produits d'entiers naturels égaux à 198.

198 = 1 × 198	Un nombre est toujours divisible par 1 et par lui-même.
198 = 2 × 99 198 = 3 × 66	Les critères de divisibilité permettent de dire que 198 n'est pas divisible par 4, 5 et 10.
198 = 6 × 33 198 = 9 × 22	Les divisions par 7, 8, 12, 13, 14, 15, 16 et 17 ne donnant pas de quotients entiers, 198 n'est pas divisible par ces entiers.
198 = 11 × 18	Le diviseur suivant est 18 et on l'a déjà obtenu avec le produit 11 × 18 : on peut donc arrêter la recherche.

Les diviseurs de 198 sont donc : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 11 ; 18 ; 22 ; 33 ; 66 ; 99 et 198.

Exemple 3 : Démontre que si un entier naturel est divisible par 6 alors il est divisible par 2.

n est divisible par 6 donc n peut s'écrire : $n = 6 \times k$ où k est un entier naturel.
$n = 2 \times 3 \times k = 2 \times (3k)$ où $3k$ est un entier naturel. Ainsi n est divisible par 2.

À connaître

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline r & q \end{array}$$

Effectuer la division euclidienne de a par b, c'est trouver deux entiers naturels q et r tels que : $a = b \times q + r$ et $r < b$.
q est le **quotient** (entier) et r le **reste** de cette division euclidienne.

Exemple 4 : a. Effectue la division euclidienne de 183 par 12.

$$\begin{array}{r|l} 183 & 12 \\ \hline 63 & 15 \\ 3 & \end{array}$$

On peut donc écrire :
183 = 12 × 15 + 3
avec 3 < 12.

b. 278 = 6 × 45 + 8 : quelle(s) division(s) euclidienne(s) cette égalité représente-t-elle ?

8 < 45 mais 8 > 6 donc l'égalité représente la division euclidienne de 278 par 45 mais ne peut pas représenter celle de 278 par 6.

Exercices « À toi de jouer »

1 Établis la liste des diviseurs des entiers suivants : 60, 43 et 36.

2 Démontre que le produit de deux entiers pairs est un multiple de 4.

3 Effectue les divisions euclidiennes suivantes : 345 par 74 et 6 675 par 89.

4 325 = 5 × 52 + 65. Sans effectuer de division, donne le quotient et le reste de la division euclidienne de 325 par 52.

Méthode 2 : Déterminer le PGCD de deux entiers naturels

À connaître

Le **PGCD de deux entiers naturels** est leur Plus Grand Diviseur Commun.

Exemple 1 : Trouve les diviseurs communs à 30 et 105 puis détermine leur PGCD.

On liste les diviseurs de 30 :
1 ; 2 ; **3** ; **5** ; 6 ; 10 ; **15** et 30.

On liste les diviseurs de 105 :
1 ; **3** ; **5** ; 7 ; **15** ; 21 ; 35 et 105.

Les diviseurs communs à 30 et 105 sont : 1 ; 3 ; 5 et 15.
Le PGCD de 30 et 105 est donc 15, car c'est le plus grand des diviseurs communs.
On note PGCD (30 ; 105) = 15 ou PGCD (105 ; 30) = 15.

Remarque : a et b étant des entiers naturels, si b divise a alors PGCD (a ; b) = b.

Exemple 2 : Détermine PGCD (189 ; 693) par la méthode des soustractions successives.

Pour cela, on utilise la propriété suivante :

a et b sont des entiers naturels et $a \geqslant b$, PGCD (a ; b) = PGCD (b ; $a - b$).

693 > 189 et 693 − 189 = 504 donc PGCD (693 ; 189) = PGCD (189 ; 504).

On cherche maintenant PGCD (189 ; 504) : on applique à nouveau la propriété.
504 > 189 et 504 − 189 = 315 donc PGCD (504 ; 189) = PGCD (189 ; 315).

On poursuit avec 189 et 315 et ainsi de suite :
315 > 189 et 315 − 189 = 126 donc PGCD (315 ; 189) = PGCD (189 ; 126).

189 > 126 et 189 − 126 = 63 donc PGCD (189 ; 126) = PGCD (126 ; 63).

Or 63 est un diviseur de 126 (126 = 63 × 2) donc PGCD (126 ; 63) = 63.

Ainsi PGCD (693 ; 189) = 63.

Exemple 3 : Trouve le PGCD de 782 et de 136 par la méthode des divisions successives.

Pour cela, on utilise la propriété suivante :

a et b sont des entiers naturels et $a \geqslant b$, PGCD (a ; b) = PGCD (b ; r) où r est le reste de la division euclidienne de a par b.

On effectue la division euclidienne de 782 par 136 : 782 = 136 × 5 + 102.
Donc PGCD (782 ; 136) = PGCD(136 ; 102).

$$\begin{array}{r|l} 782 & 136 \\ \hline 102 & 5 \end{array}$$

On cherche maintenant PGCD (136 ; 102) : on applique à nouveau la propriété.

On effectue la division euclidienne de 136 par 102 : 136 = 102 × 1 + 34.
Donc PGCD (136 ; 102) = PGCD (102 ; 34).

$$\begin{array}{r|l} 136 & 102 \\ \hline 34 & 1 \end{array}$$

On continue avec PGCD (102 ; 34).
On effectue la division euclidienne de 102 par 34 : 102 = 34 × 3.

Le reste est égal à 0 : 34 est un diviseur de 102 donc PGCD (102 ; 34) = 34.

$$\begin{array}{r|l} 102 & 34 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$$

Ainsi, PGCD (782 ; 136) = 34.

Exercices « À toi de jouer »

5 16 est-il un diviseur commun à 64 et 160 ? Est-il leur PGCD ?

6 Quel est le plus grand nombre entier divisant à la fois 35 et 91 ?

7 Calcule le PGCD de 198 et de 54 par la méthode des soustractions successives.

8 Calcule PGCD (1 789 ; 1 492) par la méthode des divisions successives.
Combien d'étapes aurait nécessité la méthode des soustractions successives ?

Méthode 3 : Démontrer que deux nombres entiers sont premiers entre eux

À connaître

Deux **entiers naturels sont premiers entre eux** lorsque leur PGCD est égal à 1.
Autrement dit, 1 est le seul diviseur commun à ces deux entiers naturels.

Exemple 1 : Démontre que 45 et 91 sont premiers entre eux.

$45 = 1 \times 45 = 3 \times 15 = 5 \times 9$. Les diviseurs de 45 sont : **1** ; 3 ; 5 ; 9 ; 15 et 45.

$91 = 1 \times 91 = 7 \times 13$. Les diviseurs de 91 sont : **1** ; 7 ; 13 et 91.

1 est le seul diviseur commun à 45 et 91 ainsi le PGCD de 45 et 91 est égal à 1 : 45 et 91 sont donc premiers entre eux.

Exemple 2 : 426 et 568 sont-ils premiers entre eux ?

426 et 568 sont tous les deux divisibles par 2 donc ils ont un autre diviseur commun que 1 : leur PGCD n'est pas égal à 1.
Ainsi 426 et 568 ne sont pas premiers entre eux.

À toi de jouer

9 Démontre que 481 et 625 sont premiers entre eux.

10 Démontre que 360 et 741 ne sont pas premiers entre eux.

Méthode 4 : Rendre une fraction irréductible

À connaître

Une **fraction est irréductible** lorsque son numérateur et son dénominateur sont **premiers entre eux**.

Exemple : Rends les fractions $\frac{75}{105}$; $\frac{198}{180}$ et $\frac{136}{782}$ irréductibles.

On remarque que 75 et 105 sont divisibles par 3 et par 5.

$$\frac{75}{105} = \frac{75 \div 3}{105 \div 3} = \frac{25}{35}$$

$$\frac{25}{35} = \frac{25 \div 5}{35 \div 5} = \frac{5}{7}.$$

5 et 7 sont premiers entre eux donc la fraction est irréductible.

On peut chercher à écrire 198 et 180 sous forme de produits de facteurs les plus petits possible :

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

$198 = 2 \times 3^2 \times 11$ donc :

$$\frac{198}{180} = \frac{2 \times 3^2 \times 11}{2^2 \times 3^2 \times 5} = \frac{11}{2 \times 5}$$

Ainsi $\frac{198}{180} = \frac{11}{10}$.

Le PGCD de 136 et 782 est 34 (*cf.* ***méthode 2***).

34 est donc le plus grand entier naturel qui divise à la fois 136 et 782.

Les quotients obtenus sont obligatoirement premiers entre eux.

$$\frac{136}{782} = \frac{136 \div 34}{782 \div 34} = \frac{4}{23}.$$

Exercices « À toi de jouer »

11 La fraction $\frac{456}{568}$ est-elle irréductible ? Justifie ta réponse.

12 Rends les fractions $\frac{48}{60}$ et $\frac{276}{161}$ irréductibles.