Activités numériques (2)

Activité 1 : De nouveaux nombres

1. Quelques racines carrées simples

a. Trouve tous les nombres dont le carré est 16.
Même question avec 0,81.

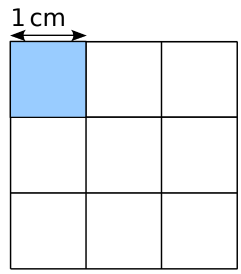
b. Si a et b sont deux nombres qui ont le même carré, que peux-tu dire de a et b ? Justifie.

c. Donne la mesure du côté du carré ci-contre.

d. Donne la mesure du côté d'un carré dont l'aire est 0,49 cm^2.

e. Trace un carré d'aire 36 cm^2. On appelle d le côté de ce carré en centimètre. Quelle relation existe-t-il entre d et 36 ? Traduis cette égalité par une phrase en français.

2. Un carré d'aire 2



a. Peux-tu tracer un carré dont l'aire est le double de celle du carré bleu ci-contre (tu pourras t'aider du quadrillage si tu le désires) ? Compare ta réponse avec celle de tes camarades.

b. On appelle c le côté de ce carré en centimètre.
Quelle relation existe-t-il entre c et 2 ? Traduis cette égalité par une phrase en français.

c. Peux-tu donner une écriture décimale de c ?

3. La notation racine carrée

Le nombre positif dont le carré est 36 est noté $\sqrt{36}$ et se lit « racine carrée de 36 ».
On a vu dans les questions précédentes que $\sqrt{36} = 6$.
Le nombre positif dont le carré est 2 est noté $\sqrt{2}$ et se lit « racine carrée de 2 ».

a. Existe-t-il un nombre dont le carré soit négatif ? Justifie.

b. À l'aide de la calculatrice, donne une valeur approchée au dix-millième de $\sqrt{2}$.

c. Recopie et complète le tableau suivant, en utilisant ta calculatrice.
Les valeurs seront arrondies au millième.

a	1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\sqrt{a}$															

d. Que remarques-tu ?

e. Certains nombres entiers ont une racine carrée entière. On dit que ces nombres sont des carrés parfaits. Cite tous les carrés parfaits compris entre 0 et 256.

4. Premiers calculs

a. Parmi les nombres suivants, quels sont ceux qui sont égaux à 13 ?

$$\sqrt{13^2} \; ; \; \sqrt{13} \; , \; (\sqrt{13})^2 \; ; \; \sqrt{(-13)^2} \; ; \; 13^2$$

b. Quelles sont les valeurs exactes de $E = \sqrt{7^2}$ et $F = \sqrt{(\pi - 5)^2}$?

Activités numériques (2)

Activité 2 : Approximation d'une racine carrée

1. Avec la calculatrice

a. On veut déterminer une valeur approchée de $\sqrt{33}$.
Sans calculatrice, donne un encadrement à l'unité de ce nombre.

b. Après avoir recopié et complété le tableau ci-dessous, donne un encadrement de $\sqrt{33}$ au dixième.

N	5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6
N^2											

2. Avec un tableur

a. Construis la feuille de calcul suivante.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Pas											
2	N	5										6
3	N^2											

b. Quelle formule dois-tu écrire dans la cellule B1 pour calculer le pas qui permette d'aller de B2 à L2 en 10 étapes ?
Complète la cellule C2 pour augmenter B2 du pas calculé en B1 puis recopie la formule jusqu'en K2 (pour recopier la formule sans changer B1, écris B1 au lieu de B1).

c. Complète la cellule B3 pour obtenir le carré du nombre en B2 puis recopie la formule jusqu'à L3.

d. Observe le tableau et donne un encadrement de $\sqrt{33}$ au dixième près.

e. Remplace le contenu de B2 et de L2 par les bornes de ton encadrement.
Quel encadrement de $\sqrt{33}$ obtiens-tu ? Quelle est sa précision ?

f. Recommence la question précédente avec le nouvel encadrement jusqu'à obtenir une précision de 10^{-6} (tu peux changer le format d'affichage des nombres).

g. Utilise ta feuille de calcul pour obtenir une approximation de $\sqrt{125}$ à 10^{-4} près.

Activité 3 : Somme de deux racines carrées

Dans toute cette activité, on prendra comme unité : 1 u = 5 cm.

a. Construis un carré OUBA de côté 1 u. Trace le cercle de centre O et de rayon OB. Il coupe la demi-droite [OU) en C. Calcule OC en utilisant l'unité de mesure choisie.

b. Trace la droite perpendiculaire à (OU) passant par C. Elle coupe (AB) en C' et le cercle de centre O, de rayon OC' coupe [OU) en D. Calcule OD dans l'unité de mesure choisie.

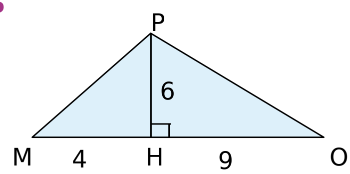
c. En t'inspirant des questions précédentes, construis le point F de la demi-droite [OU) tel que OF = $\sqrt{5}$ u .

d. Place le point G sur la demi-droite [OU) tel que OG = OC + OD.
Quelle est la mesure exacte de OG ?

e. Compare OF et OG. Que peux-tu en déduire ?

Activités numériques (2)

Activité 4 : Produit de deux racines carrées



1. Conjecture

a. Quelle est l'aire du triangle POM ?

b. Démontre que POM est un triangle rectangle.

c. Calcule l'aire de ce triangle d'une deuxième manière.

d. En t'aidant des résultats trouvés dans les questions **a.** et **c.**, écris $\sqrt{117} \times \sqrt{52}$ sous la forme $\sqrt{c}$ où c est un nombre entier. Déduis-en un moyen de calculer $\sqrt{117} \times \sqrt{52}$ d'une autre manière.

e. Recopie et complète le tableau suivant pour confirmer ta conjecture.

a	b	$\sqrt{a \times b}$	$\sqrt{a} \times \sqrt{b}$
4	16		
5	2		
100	64		
– 2	– 3		

2. Démonstration

On va démontrer que $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ pour tous nombres a et b **positifs**.
L'idée de la démonstration est d'élever au carré chacun des termes de l'égalité.

a. Pourquoi a et b doivent-ils être positifs ?

b. Calcule $\left(\sqrt{a \times b}\right)^2$ et $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2$ puis conclus.

3. Exemples

a. Sans calculatrice, calcule les nombres suivants.

$$\text{A} = \sqrt{5} \times \sqrt{45} \ ; \ \text{B} = \sqrt{5} \times \sqrt{2} \times \sqrt{10}$$

b. Calcule de même $\text{D} = \sqrt{2} \times \sqrt{18}$ et $\text{E} = \sqrt{27} \times \sqrt{6} \times \sqrt{8}$.

c. Développe et réduis les expressions suivantes.

$$\text{F} = 3\sqrt{2}\left(7\sqrt{2} - \sqrt{5}\right) \ ; \ \text{G} = \left(\sqrt{7} + 2\right)\left(15 - \sqrt{3}\right)$$

4. Application aux simplifications de racines

a. Décompose 12 sous la forme d'un produit de deux entiers.
Combien y a-t-il de possibilités ? Laquelle permet de simplifier $\sqrt{12}$?

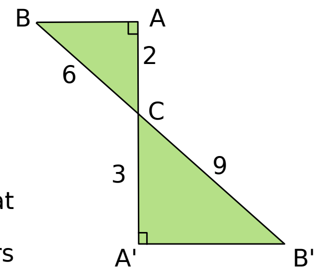
b. Même question avec $\sqrt{45}$.

c. Quelle méthode peux-tu utiliser pour simplifier une racine carrée ?

d. Écris les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers avec b le plus petit possible : $\sqrt{72}$; $\sqrt{75}$; $\sqrt{32}$.

Activités numériques (2)

Activité 5 : Quotient de deux racines carrées



1. Conjecture

a. Calcule la valeur de $\frac{AB}{A'B'}$.

b. En utilisant la définition d'une racine carrée, écris le résultat précédent sous la forme $\sqrt{\frac{a}{b}}$ où a et b sont des entiers positifs avec $b \neq 0$.

c. Calcule AB puis A'B'.

d. Compare les deux écritures de $\frac{AB}{A'B'}$ et trouve un moyen pour simplifier $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{72}}$.

e. Recopie et complète le tableau suivant et déduis-en une méthode de simplification de quotients de racines carrées.

a	b	$\sqrt{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
25	16		
100	64		
49	9		
– 2	– 4		

2. Démonstration

On va démontrer que, si a est positif et b est strictement positif alors $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

a. Pourquoi a doit-il être positif et b strictement positif ?

b. Démontre l'égalité.

Activité 6 : Équation du type $x^2 = a$

a. Quels sont les nombres dont le carré est 49 ? 225 ? 7 ?

b. Existe-t-il des nombres dont le carré est – 9 ? – 36 ? – 7 ? Justifie.

c. Selon toi, combien existe-t-il de solution(s) pour les équations suivantes ?

- $x^2 = 16$
- $x^2 = 13$
- $x^2 = -4$

d. Factorise $x^2 - 10$ puis résous l'équation $x^2 = 10$.

e. Combien de solutions a l'équation $(x + 2)^2 = 5$?

f. Résous l'équation $(x + 2)^2 = 5$.

Activités numériques (2)

Activité 7 : Le point sur les nombres

1. Les ensembles de nombres

Voici une liste de nombres.

$\frac{-457}{23}$; $4\sqrt{2}$; 854 ; $0{,}000\,08 \times 10^7$; $\sqrt{49}$; π ; $\frac{174}{58}$; $-0{,}000\,415\,7$; $-\sqrt{\frac{4}{9}}$; $\frac{58}{4}$; 10^{-3}

a. Dans cette liste, quels sont les nombres entiers ? Quels sont les nombres décimaux ?

b. Y a-t-il des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous forme décimale ?

c. Y a-t-il des nombres qui peuvent s'écrire sous forme fractionnaire ?

d. Y a-t-il des nombres qui ne rentrent dans aucune des catégories précédentes ?

2. Rationnel ou pas ?

a. $\sqrt{2}$ n'est ni un nombre entier ni un nombre décimal. Est-ce un nombre rationnel ?

Dans cette partie, on suppose que $\sqrt{2}$ est un un nombre rationnel et qu'il peut s'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers relatifs p et q : $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ où $\frac{p}{q}$ est un quotient irréductible. Démontre que $2q^2 = p^2$.

b. Dans cette question, on va étudier la divisibilité de p^2 et de $2q^2$ par 2 et par 5.
Pour cela, recopie et complète les tableaux ci-dessous.

Si le chiffre des unités de p est...	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
alors le chiffre des unités de p^2 est...										

Si le chiffre des unités de q est...	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
alors le chiffre des unités de q^2 est...										
et le chiffre des unités de $2q^2$ est...										

c. En observant les tableaux précédents, quel(s) est (sont), selon toi, le (les) chiffre(s) des unités possible(s) de p et q quand $2q^2 = p^2$?

d. La fraction $\frac{p}{q}$ est-elle irréductible ? Qu'en déduis-tu pour le nombre $\sqrt{2}$?

3. Une autre démonstration

a. On suppose que $\sqrt{2}$ est un quotient de deux entiers relatifs p et q donc il peut s'écrire sous la forme $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ où $\frac{p}{q}$ est un quotient irréductible. Démontre que $2q^2 = p^2$ et déduis-en que p^2 est pair.

b. En utilisant la propriété énoncée dans l'exercice 7 des approfondissements du chapitre N1, démontre que p est pair.

c. p étant pair, p peut s'écrire sous la forme $2p'$. Calcule alors q^2.

Que peux-tu en déduire pour la parité de q ? Que peux-tu dire de la fraction $\frac{p}{q}$?

Méthode 1 : Utiliser la définition de la racine carrée

À connaître

La **racine carrée d'un nombre positif** a est le **nombre positif**, noté $\sqrt{a}$, dont le carré est a. Le symbole $\boxed{\sqrt{}}$ est appelé « **radical** ».

Remarque : $\sqrt{a}$ n'a pas de sens lorsque a est un nombre strictement négatif.

À connaître

Pour tout nombre **positif** a, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$.

Exemple 1 : Calcule $\sqrt{1}$; $\left(\sqrt{3{,}6}\right)^2$; $\sqrt{9}$; $\sqrt{5^2}$; $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ et $\sqrt{1{,}3 \times 1{,}3}$.

- $1^2 = 1$ et 1 est positif donc $\sqrt{1} = 1$.
- 3,6 est positif donc $\left(\sqrt{3{,}6}\right)^2 = 3{,}6$.
- $3^2 = 9$ et 3 est positif donc $\sqrt{9} = 3$.
- 5 est positif donc $\sqrt{5^2} = 5$ et $\sqrt{(-5)^2} = 5$.
- 2 est positif donc $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$.
- 1,3 est positif donc $\sqrt{1{,}3 \times 1{,}3} = \sqrt{1{,}3^2} = 1{,}3$.

À connaître

Un **carré parfait** est le carré d'un nombre entier, sa racine carrée est un nombre entier positif.

Exemple 2 : À l'aide de la calculatrice, donne la valeur exacte ou la valeur arrondie au millième des nombres $\sqrt{625}$; $\sqrt{2}$ et $\sqrt{12{,}25}$.

On utilise la touche $\boxed{\sqrt{}}$ de la calculatrice.

- Pour $\sqrt{625}$, la calculatrice affiche 25.
  Donc $\sqrt{625} = 25$ (**valeur exacte**).
  La racine carrée de 625 est un entier ; 625 est un **carré parfait**.
- Pour $\sqrt{2}$, la calculatrice affiche 1,414213562.
  2 **n'est pas un carré parfait**, on donne une **valeur arrondie** de $\sqrt{2}$.
  Donc $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ (**valeur arrondie au millième**).
- Pour $\sqrt{12{,}25}$, la calculatrice affiche 3,5.
  Donc $\sqrt{12{,}25} = 3{,}5$ (**valeur exacte**).

À toi de jouer

1 Recopie et complète.

$\sqrt{0} = \ldots$; $\sqrt{81} = \ldots$; $\sqrt{7{,}3^2} = \ldots$; $\sqrt{\ldots} = 4$; $\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^2 = \ldots$; $\sqrt{\pi} \times \sqrt{\pi} = \ldots$; $\sqrt{\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3}} = \ldots$.

2 Calcule et donne le résultat sous forme d'un nombre décimal.

$A = \sqrt{4}$; $B = \sqrt{25}$; $C = \left(-\sqrt{4{,}9}\right)^2$; $D = \sqrt{(-7)^2}$; $E = \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2$.

3 À l'aide de la calculatrice, donne l'écriture décimale exacte ou approchée à 0,001 près par défaut des nombres.

$F = \sqrt{3}$; $G = \dfrac{\sqrt{529}}{23}$; $H = 5\sqrt{0{,}81}$; $I = \sqrt{3 + \dfrac{2}{3}}$; $J = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{5}}$.

4 Dresse la liste des douze premiers carrés parfaits.

Méthode 2 : Simplifier la racine carrée d'un produit ou le produit de racines carrées

À connaître

Pour tous nombres positifs a et b, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

Exemple 1 : Simplifie puis calcule les nombres $A = \sqrt{3} \times \sqrt{27}$ et $B = \sqrt{5} \times \sqrt{0,45}$.

$A = \sqrt{3} \times \sqrt{27} = \sqrt{3 \times 27} = \sqrt{81} = 9$	$B = \sqrt{5} \times \sqrt{0,45} = \sqrt{5 \times 0,45} = \sqrt{2,25} = 1,5$

Exemple 2 : Écris le nombre $C = \sqrt{32}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux nombres entiers positifs, b étant le plus petit possible.

$C = \sqrt{16 \times 2}$

$C = \sqrt{4^2 \times 2}$ ⟶ On fait apparaître le produit d'un **carré parfait** (le plus grand possible) par un entier.

$C = \sqrt{4^2} \times \sqrt{2}$

$C = 4 \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ ⟶ On décompose la racine carrée du produit puis on applique la définition d'une racine carrée.

À toi de jouer

5 Écris sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers positifs, b étant le plus petit possible, les nombres $F = \sqrt{63}$; $G = \sqrt{147}$; $H = 3\sqrt{700}$ et $I = \dfrac{\sqrt{175}}{5}$.

Méthode 3 : Simplifier la racine carrée d'un quotient ou le quotient de racines carrées

À connaître

Pour tous nombres positifs a et b ($b \neq 0$), $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Exemple 1 : Simplifie les nombres $A = \sqrt{\dfrac{36}{25}}$ et $B = \dfrac{\sqrt{0,56}}{\sqrt{0,08}}$.

$A = \sqrt{\dfrac{36}{25}} = \dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}} = \dfrac{6}{5}$	$B = \dfrac{\sqrt{0,56}}{\sqrt{0,08}} = \sqrt{\dfrac{0,56}{0,08}} = \sqrt{\dfrac{0,56 \times 100}{0,08 \times 100}} = \sqrt{\dfrac{56}{8}} = \sqrt{7}$

Exemple 2 : Écris $C = \sqrt{\dfrac{25}{7}}$ sous la forme d'un quotient, sans radical au dénominateur.

$C = \sqrt{\dfrac{25}{7}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{7}} = \dfrac{5}{\sqrt{7}}$ ⟶ On décompose la racine carrée du quotient afin de simplifier le numérateur.

$C = \dfrac{5 \times \sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \dfrac{5\sqrt{7}}{7}$ ⟶ On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{7}$ puis on applique la définition d'une racine carrée.

À toi de jouer

6 Simplifie $D = \dfrac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$ puis écris $F = \sqrt{\dfrac{15}{45}}$ sous la forme d'un quotient, sans radical au dénominateur.

Méthode 4 : Réduire une somme de racines carrées

Exemple 1 : Réduis la somme $A = \sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 7\sqrt{5}$.

$A = \sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 7\sqrt{5}$ →	On remarque que $\sqrt{5}$ est un facteur commun aux trois termes de la somme.
$A = (1 - 2 + 7)\sqrt{5}$ →	On factorise par $\sqrt{5}$.
$A = 6\sqrt{5}$ →	On donne l'écriture demandée dans l'énoncé.

Exemple 2 : Écris $B = 2\sqrt{72} - 7\sqrt{18}$ sous la forme $c\sqrt{d}$, où c et d sont deux entiers, d étant le plus petit possible.

$B = 2\sqrt{36 \times 2} - 7\sqrt{9 \times 2}$ →	On décompose 72 et 18 pour faire apparaître le produit d'un carré parfait (le plus grand possible) par un même entier.
$B = 2\sqrt{36} \times \sqrt{2} - 7\sqrt{9} \times \sqrt{2}$ →	On décompose la racine carrée de chacun des produits.
$B = 2 \times 6\sqrt{2} - 7 \times 3\sqrt{2}$ →	On applique la définition d'une racine carrée.
$B = 12\sqrt{2} - 21\sqrt{2}$ →	$\sqrt{2}$ est un facteur commun aux deux termes.
$B = (12 - 21)\sqrt{2}$ →	On factorise par $\sqrt{2}$.
$B = -9\sqrt{2}$ →	On donne l'écriture demandée dans l'énoncé.

À toi de jouer

7 Réduis les sommes $C = 3\sqrt{7} + 2\sqrt{7} - \sqrt{7}$ et $D = 11\sqrt{5} - 25\sqrt{5} + 14\sqrt{5}$.

8 Écris $E = \sqrt{12} + 5\sqrt{27} - \sqrt{3}$ et $F = \sqrt{180} + 3\sqrt{20} - 7\sqrt{125}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers, b étant le plus petit possible.

Méthode 5 : Résoudre une équation du type $x^2 = a$

À connaître

> Pour tout nombre relatif a,
> • Si $a > 0$ alors l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
> • Si $a = 0$ alors l'équation $x^2 = 0$ admet une seule solution 0.
> • Si $a < 0$ alors l'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution.

Exemple : Résous les équations $x^2 = 3$, $x^2 = 36$ et $x^2 = -9$.

• $3 > 0$ donc les deux solutions de l'équation $x^2 = 3$ sont $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

• $36 > 0$ donc les deux solutions de l'équation $x^2 = 36$ sont $-\sqrt{36}$ et $\sqrt{36}$ soit -6 et 6.

• $-9 < 0$ donc l'équation $x^2 = -9$ n'a aucune solution.

À toi de jouer

9 Résous les équations $x^2 = 121$; $x^2 = 18$; $4x^2 = 9$ et $x^2 + 9 = 5$.

10 Résous l'équation $(x + 2)^2 = 1$.