

Espace

Activité 1 : Solides de révolution

1. On fait tourner un rectangle autour de l'un de ses côtés et un triangle rectangle autour de l'un des côtés de l'angle droit.

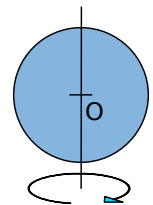


Quels sont les solides engendrés par ces deux rotations ? Donne leurs caractéristiques.

2. La sphère, la boule

Dans du papier épais, découpe un disque de centre O et de rayon 4 cm. Colle une ficelle le long d'un diamètre et fais tourner le disque autour de la ficelle.

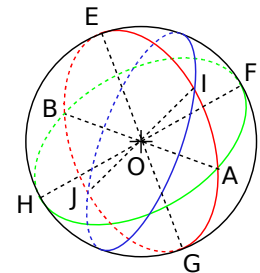
- Les solides engendrés par le disque ou par le cercle de rayon 4 cm sont-ils identiques ? Si non, donne les ressemblances et les différences entre ces deux solides.
- Quelle autre figure pourrait-on faire tourner pour engendrer ces mêmes solides ?



3. Grands cercles

La figure ci-contre est une représentation d'une sphère de rayon 2 cm.

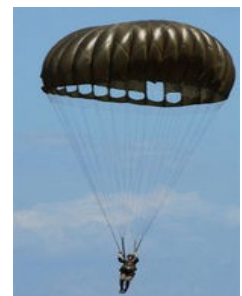
- En réalité, quelle est la longueur de $[AB]$? De $[FH]$? Justifie tes réponses.
- En réalité, quelle est la nature des triangles AOF et IOB ? Justifie tes réponses.
Cite tous les triangles de la figure qui ont la même nature que ceux-ci.
- Quelle est la nature du triangle EIG ? Justifie ta réponse.



Activité 2 : Aire, volume

1. Une toile de parachute a la forme d'une demi-sphère de 8 m de diamètre.

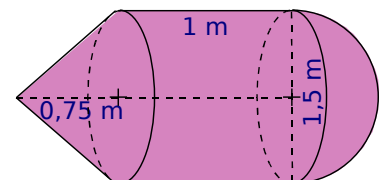
- Recherche la formule donnant l'aire d'une sphère puis détermine la superficie de la toile arrondie au mètre carré.
- Recherche la formule donnant le volume d'une boule puis détermine le volume d'air contenu dans la toile au mètre cube près lorsque le parachute est entièrement déployé.



Source Wikipedia.

2. La citerne ci-contre est composée d'un cylindre de révolution, d'une demi-sphère et d'un cône de révolution de même rayon.

- Calcule son volume exact en fonction de π puis sa valeur arrondie au décimètre cube.
- Est-il vrai que la citerne peut contenir plus de 3 000 L ?



Angles

Activité 3 : Sections d'un pavé, d'un cylindre

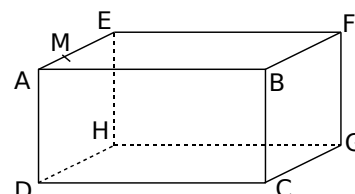
1. Sections d'un pavé droit

- a. Pour faire un gâteau, on coupe une plaquette de beurre parallèlement à l'une de ses faces. Quelle est la forme de la section ? Et si on coupe parallèlement à l'une de ses arêtes mais sans être parallèle à une face ?



- b. On considère le pavé droit ABCDEFGH ci-dessous où $AB = 3 \text{ cm}$; $AD = 1,5 \text{ cm}$ et $AE = 4 \text{ cm}$.

On place un point M sur [AE] tel que $AM = 1 \text{ cm}$ et on coupe le solide parallèlement à la face ABCD. Reproduis le pavé ci-contre puis trace en rouge la ligne de section passant par M. Quelle est la nature de la section ? Dessine-la en vraie grandeur.

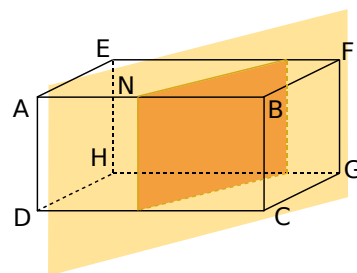


- c. En coupant le pavé par un plan parallèle à la face AEFB, quelle sera la nature de la section ? Fais-en une représentation en vraie grandeur.

- d. Même question pour un plan parallèle à la face BFGC.

- e. On coupe cette fois le pavé ABCDEFGH par un plan parallèle à l'arête [AD] et passant par un point N de [AB].

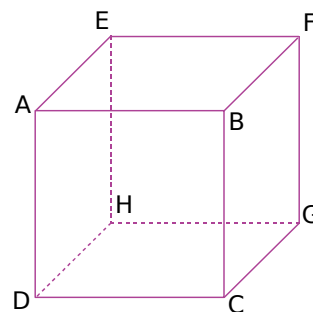
Quelle est la nature de la section ? Que peux-tu dire de ses dimensions ?



2. Sections d'un cube

On considère ci-contre un cube ABCDEFGH d'arête 5 cm.

- a. Dessine une représentation en perspective du cube et place un point M sur [AD]. Dessine la ligne de la section du cube par le plan parallèle à la face AEFB qui passe par le point M. Dessine alors la section en vraie grandeur.
- b. Dessine, sur les représentations en perspective puis en vraie grandeur, la plus grande section du cube qu'on puisse obtenir en le coupant par un plan parallèle à l'arête [FB].



3. À la scierie

On débite un tronc d'arbre assimilé à un cylindre de révolution de rayon 0,4 m et de hauteur 2 m.



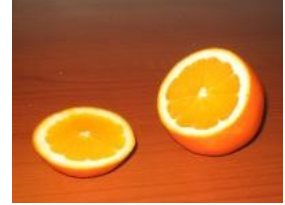
- a. On le coupe perpendiculairement à l'axe du tronc. Quelle est la forme de la section ? Représente celle-ci à l'échelle 1/20.
- b. En sectionnant le tronc parallèlement à son axe, quelle forme obtient-on ? Fais une représentation possible à l'échelle 1/40.
- c. Pour obtenir une planche, on coupe le tronc par un plan parallèle à son axe. Fais un schéma en perspective de la section. Quelle est la forme réelle de la section ? Quelles sont ses dimensions possibles ?

Equations & Inéquations

Activité 4 : Section d'une sphère

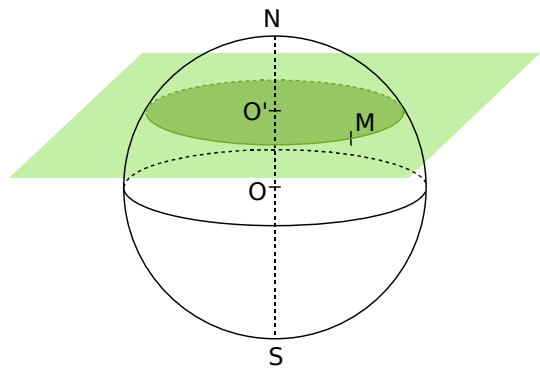
1. Observation

- On coupe une orange. Quelle forme voit-on apparaître ?
Que peut-on dire de la droite passant par le centre de l'orange et le centre de la section ?
- On coupe une balle de ping-pong. Quelle est la section apparente ?

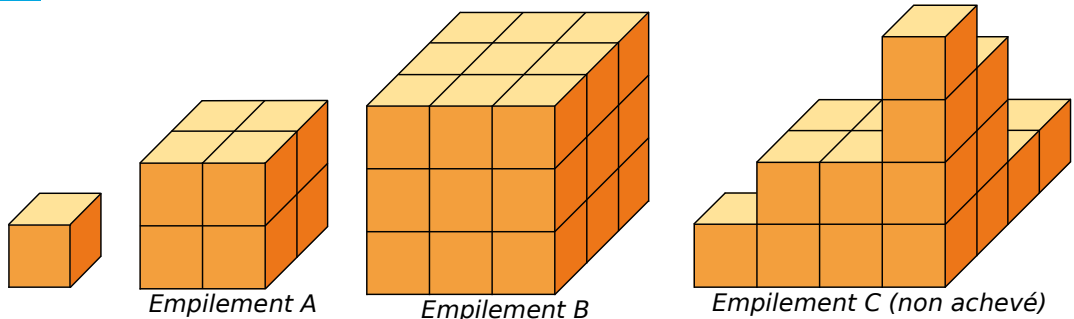


2. On considère une sphère de centre O et sa section par un plan passant par un point O' du diamètre $[NS]$ et perpendiculaire à ce diamètre.

- M est un point du cercle de section.
Que peut-on dire du triangle $OO'M$ dans la réalité ?
- Que peut-on dire de la section lorsque le plan passe par le point O ?
- Que peut-on dire de la section lorsque le plan passe par le point N ?
- On a coupé une sphère de centre O et de rayon 5 cm par un plan et on a obtenu un cercle de section de centre O' et de rayon 3 cm.
À quelle distance OO' du centre de la sphère a-t-on coupé ?



Activité 5 : Agrandissement, réduction



- Combien de cubes contiennent les empilements A et B ?
On a commencé l'empilement C et on souhaite obtenir un cube. Combien de petits cubes y aura-t-il en tout dans ce nouvel empilement ?
- Quel est le coefficient d'agrandissement permettant d'obtenir les dimensions de chacun de ces trois empilements à partir de l'arête du petit cube ?
- Combien de petits carrés peut-on voir sur chaque face de ces empilements cubiques ?
Par combien est multipliée l'aire d'une face du petit cube pour obtenir l'aire d'une face de l'empilement A ? De l'empilement B ? De l'empilement C ?
Compare avec les échelles trouvées au **b.**
- Par combien est multiplié le volume du petit cube pour obtenir celui des trois empilements cubiques ? Compare avec les échelles trouvées au **b.**

Equations & Inéquations

Activité 6 : Maquette

Un immeuble de 24 m de long, de 12 m de large et de 15 m de haut a la forme d'un pavé droit. On en fait une maquette à l'échelle 1/300.



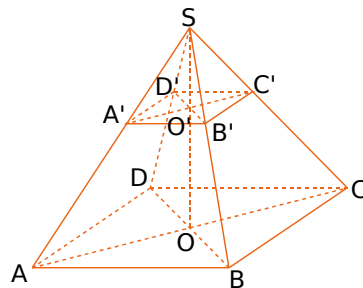
- Calcule les dimensions de la maquette.
- Joël dit que la surface au sol occupée par la maquette est 300 fois plus petite que celle occupée par l'immeuble. Qu'en penses-tu ? Fais les calculs utiles pour justifier ta réponse.
- Que pourrait-on annoncer à propos de la comparaison des volumes de la maquette et de l'immeuble ? Fais les calculs utiles pour vérifier ton affirmation.

Activité 7 : Section d'une pyramide, d'un cône de révolution

1. Section d'une pyramide par un plan parallèle à la base

On considère la pyramide régulière SABCD à base carrée de centre O représentée ci-dessous. Par un point O' de [SO], on coupe la pyramide parallèlement à sa base. On donne $AB = 4,5$ cm ; $SO = 6$ cm et $SO' = 2$ cm.

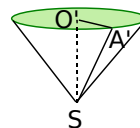
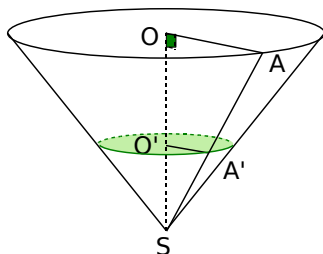
- Que peut-on dire des droites (OA) et (O'A') ? (AB) et (A'B') ? (BC) et (B'C') ? Justifie.
- Représente les triangles SOA et SAB en vraie grandeur.
- Démontre que $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA}$.
Dédus-en la nature du quadrilatère A'B'C'D'.
- Quelle est la nature de la pyramide SA'B'C'D' ?
- Calcule le volume de la pyramide SABCD puis déduis-en celui de la pyramide SA'B'C'D'.



2. Section d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base

Le triangle SOA rectangle en O engendre un cône de révolution de hauteur 20 cm et de rayon de base 5 cm. On réalise la section de ce cône par le plan parallèle à la base passant par O', un point de [SO], tel que $SO' = 2$ cm.

- Calcule O'A' et SA'.
- Calcule les valeurs exactes des volumes des deux cônes.
- Par quel coefficient faut-il multiplier le volume du grand cône pour obtenir celui du petit cône ?



Méthode 1 : Calculer des aires ou des volumes

À connaître

Pour **calculer l'aire A d'une sphère**, on utilise la formule : $A = 4 \times \pi \times \text{rayon}^2$.

Pour **calculer le volume V d'une boule**, on utilise la formule : $V = \frac{4}{3} \times \pi \times \text{rayon}^3$.

Exemple : Calcule l'aire d'une sphère et le volume d'une boule toutes deux de rayon 5 cm. Donne les valeurs exactes puis des valeurs approchées au dixième près.

On calcule l'aire de la sphère :

$$A = 4 \times \pi \times \text{rayon}^2 = 4 \times \pi \times 5^2$$

$$A = 100\pi \text{ cm}^2 \text{ valeur exacte}$$

$$A \approx 314,2 \text{ cm}^2 \text{ valeur approchée}$$

On calcule le volume de la boule :

$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times \text{rayon}^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 5^3$$

$$V = \frac{500}{3} \pi \text{ cm}^3 \text{ valeur exacte}$$

$$V \approx 523,6 \text{ cm}^3 \text{ valeur approchée}$$

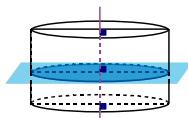
Exercices « À toi de jouer »

- 1 Calcule l'aire exacte d'une sphère de rayon 6,2 cm puis arrondis le résultat au cm^2 .
- 2 Calcule le volume exact d'une boule de rayon 9 cm puis l'arrondi au mm^3 .

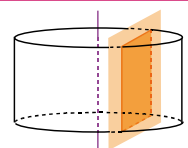
Méthode 2 : Déterminer la section d'un cylindre de révolution par un plan parallèle ou perpendiculaire à sa base

À connaître

La section d'un cylindre de révolution par un plan perpendiculaire à son axe est un cercle de même rayon que la base.



La section d'un cylindre de révolution par un plan parallèle à son axe est un rectangle.

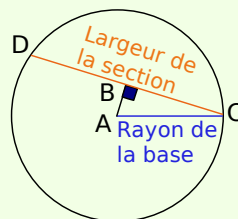


Exemple : Un cylindre de révolution de hauteur 10 cm dont le rayon de la base mesure 3 cm est coupé parallèlement à son axe à 2 cm de celui-ci. Quelles sont les dimensions de la section ?

La section d'un cylindre de révolution par un plan parallèle à son axe est un rectangle.

La longueur du rectangle correspond à la hauteur du cylindre.

La figure représente une vue de face de la base du cylindre.



Le triangle ABC est rectangle en B. D'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2$ soit $3^2 = 2^2 + BC^2$. $BC^2 = 9 - 4 = 5$, d'où $BC = \sqrt{5}$.

Le triangle ADC est isocèle en A, donc B est le milieu de [DC]. D'où $DC = 2\sqrt{5}$.

Les dimensions de la section rectangulaire de ce cylindre sont 10 cm et $2\sqrt{5}$ cm.

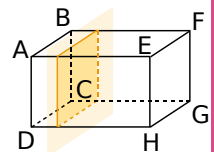
Exercices « À toi de jouer »

- 3 La section d'un cylindre de révolution de hauteur 12 cm par un plan parallèle à son axe a pour largeur 8 cm. La distance entre l'axe et la section est 3 cm. Quel est le rayon de la base de ce cylindre ?

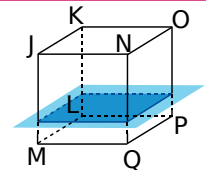
Méthode 3 : Déterminer la section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une face ou à une arête

À connaître

La section d'un parallélépipède rectangle par **un plan parallèle à une face** est un **rectangle** de mêmes dimensions que cette face.



Remarque : Dans le cas particulier du cube, la section par un plan parallèle à une face est un carré de même dimension que cette face.



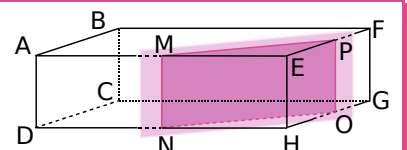
Exemple : Sur les figures ci-dessus, on donne $AD = 4 \text{ cm}$; $AB = 3 \text{ cm}$; $AE = 5 \text{ cm}$ et $JN = 4 \text{ cm}$. Donne les dimensions des sections représentées.

Dans le pavé droit ABCDEFGH, la section représentée est parallèle à la face ABCD. Cette section est donc un rectangle de mêmes dimensions que ABCD soit 3 cm sur 4 cm.

Dans le cube JKLMNOPQ, la section représentée est parallèle à la face LMQP. Cette section est donc un carré de même dimension que LMQP soit 4 cm.

À connaître

La section d'un pavé droit ou d'un cube par **un plan parallèle à une arête** est un **rectangle**, dont l'une des dimensions correspond à la longueur de cette arête.



Exemple : Le pavé droit ABCDEFGH est coupé par un plan parallèle à l'arête [EH] de longueur 4 cm. On donne $EM = 3 \text{ cm}$ et $EP = 2 \text{ cm}$. Donne la nature et les dimensions de la section MNOP.

La section MNOP est parallèle à l'arête [EH] donc MNOP est un rectangle et $MN = EH$. La face AEFB du pavé droit est un rectangle donc le triangle MEP est rectangle en E. D'après le théorème de Pythagore, $MP^2 = ME^2 + EP^2$.

$$MP^2 = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13. \text{ D'où } MP = \sqrt{13}.$$

Les dimensions du rectangle MNOP sont 4 cm et $\sqrt{13} \text{ cm}$.

Exercices « À toi de jouer »

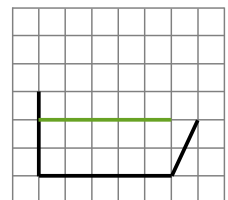
4 Un pavé droit ABCDEFGH a pour dimensions $AB = 5 \text{ cm}$, $AD = 6 \text{ cm}$ et $AE = 8 \text{ cm}$. Il est coupé par un plan parallèle à l'arête [EH], le long de la diagonale [AF].

a. Représente en vraie grandeur la face ABFE et la section AFGD.

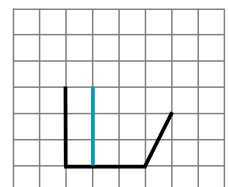
b. Détermine les dimensions exactes de cette section.

c. Donne la valeur arrondie au dixième de l'aire de cette section.

5 Reproduis la figure et complète le tracé du pavé droit, en noir et de la section parallèle aux faces horizontales, en vert.

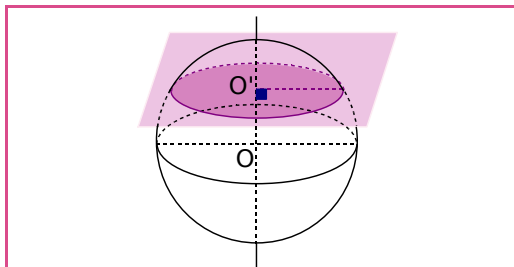


6 Reproduis la figure et complète le tracé du cube, en noir et de la section parallèle aux faces verticales, en bleu.

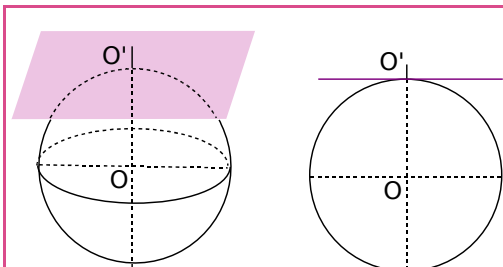


Méthode 4 : Déterminer la section d'une sphère par un plan

À connaître



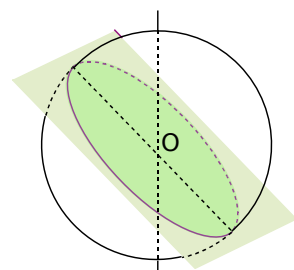
La section d'une sphère de centre O par un plan est un **cercle** de centre O' . Lorsque le plan ne passe pas par le centre de la sphère, la droite (OO') est perpendiculaire au plan de section.



Quand la distance OO' correspond au rayon de la sphère, la section est alors réduite au point O' . On dit que le plan est **tangent à la sphère en O'** .

Remarques :

- Le rayon de la section est toujours plus petit ou égal au rayon de la sphère.
- Dans le cas où le plan de section passe par le centre de la sphère, le rayon de la section est égal au rayon de la sphère. La section est alors appelée **grand cercle**.



Exemple : Une sphère de rayon 4 cm est coupée par un plan à 3 cm de son centre. Quelle est la nature de la section ? Représente la sphère et sa section en perspective. Donne les dimensions de la section.

La section d'une sphère par un plan est un cercle. On appelle C le centre de la sphère, A le centre de la section et B un point de la section. La droite (AC) est perpendiculaire au plan de section. En particulier, elle est perpendiculaire au rayon de la section $[AB]$. Donc le triangle ABC est rectangle en A .

D'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

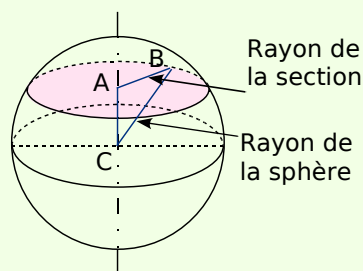
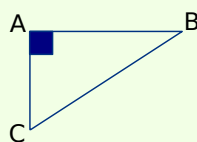
$$4^2 = AB^2 + 3^2$$

$$AB^2 = 16 - 9$$

$$AB^2 = 7$$

$$\text{d'où } AB = \sqrt{7} \text{ cm.}$$

Le rayon de la section de cette sphère mesure $\sqrt{7}$ cm.



Exercices « À toi de jouer »

7 Une sphère de rayon 7 cm est coupée par un plan à 5 cm de son centre.

a. Quelle est la nature de la section ?

b. Représente la section en vraie grandeur.

8 Une sphère de rayon 13 cm est coupée par un plan à 12 cm du centre.

a. Représente la sphère et la section en perspective.

b. Quel est le rayon de la section ?

Méthode 5 : Agrandir ou réduire, effet sur l'aire, le volume

À connaître

Lors d'un agrandissement ou d'une réduction de rapport k , les longueurs sont multipliées par k , les aires sont multipliées par k^2 , les volumes sont multipliés par k^3 .

Exemple : Des ingénieurs ont construit une maquette au 1/5 000 d'un bassin de retenue. La maquette mesure 1,60 m de long et contient 5 L d'eau. La surface du lac artificiel est 80 dm². Quelle sera, en km, la longueur du futur lac artificiel ? Quelle sera, en km², sa surface ? Quel sera, en millions de m³, le volume d'eau contenu dans le lac ?

Pour obtenir les longueurs réelles à partir des longueurs de la maquette au 1/5 000, le coefficient d'agrandissement est $k = 5\,000$.

Longueur en m	Aire en dm ²	Volume en L	1 m ³ correspond
$L_{\text{réelle}} = k \times L_{\text{maquette}}$	$A_{\text{réelle}} = k^2 \times A_{\text{maquette}}$	$V_{\text{réel}} = k^3 \times V_{\text{maquette}}$	à 1 000 L donc
$L = 5\,000 \times 1,6$	$A = (5\,000)^2 \times 80$	$V = (5\,000)^3 \times 5$	en m ³ ,
$L = 8\,000$	$A = 2\,000\,000\,000$	$V = 625\,000\,000\,000$	$V = 625\,000\,000$

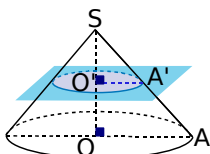
Le lac artificiel mesurera 8 km de long. Il aura une surface de 20 km² et contiendra 625 millions de m³ d'eau.

Exercices « À toi de jouer »

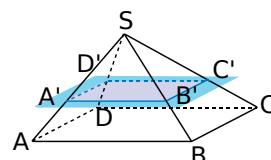
9 Mihail fabrique deux pyramides dans du papier doré. Il réalise la deuxième en divisant toutes les longueurs de la première par 2. La surface de papier utilisé est-elle deux fois plus petite ? Le volume de l'objet obtenu est-il deux fois plus petit ?

Méthode 6 : Déterminer la section d'une pyramide ou d'un cône de révolution par un plan parallèle à sa base

À connaître



La section d'une pyramide ou d'un cône de révolution par un **plan parallèle à la base** est une réduction de la base.



Remarque : La pyramide SA'B'C'D' est une réduction de la pyramide SABCD et le cône de révolution de hauteur [SO'] est une réduction du cône de révolution de hauteur [SO].

Exemple : La pyramide SABCD à base carrée de côté 3 cm et de hauteur 5 cm est coupée par un plan parallèle à sa base à 4 cm du sommet. Quelle est la longueur A'B' du côté de la base de la pyramide réduite SA'B'C'D' ?

La hauteur de la pyramide initiale est 5 cm et celle de la pyramide réduite est 4 cm. Le coefficient de réduction est $k = \frac{4}{5}$. La longueur du côté de la base de la pyramide réduite est donnée par : $A'B' = k \times AB = \frac{4}{5} \times 3 = 2,4$. Soit $A'B' = 2,4$ cm.

Exercices « À toi de jouer »

10 Un verre à cocktail de forme conique de contenance 12,8 cL est rempli aux trois quarts de sa hauteur par un mélange de jus de fruits. Quel volume de jus de fruits contient-il ?