

Fonction linéaire ; Fonction affine

Activité 1 : À partir d'une situation connue

1. Prix en fonction de la masse

Chez un fromager, on peut lire sur l'étiquette d'un morceau de fromage : sa masse 0,8 kg et son prix 12 €.

- Calcule le prix de 100 g de ce fromage de plusieurs façons différentes. Calcule le prix de 0,9 kg de plusieurs façons différentes.
- Quelle est la masse d'un morceau coûtant 18 € ? Trouve plusieurs façons de calculer cette masse.
- Si p € représente le prix d'un morceau de fromage et m kg sa masse, quelle(s) relation(s) lie(nt) les nombres p et m ? Que peux-tu dire des deux grandeurs précédentes ?

2. Avec une fonction

- Trouve une fonction f pour laquelle, si p € représente le prix d'un morceau de fromage et m kg sa masse alors $f(m) = p$.
- Traduis les calculs effectués dans les questions **a.**, **b.** et **c.** de la partie **1.** à l'aide de cette fonction et en utilisant le vocabulaire « image » et « antécédent ».
- Quelle est l'image de $\frac{4}{7}$ par f ? Calcule $f(-3)$. Détermine l'antécédent de 2.
- Compare $f(4)$ et $5 \times f(0,8)$ puis $f(1,2)$ et $f(0,8) + f(0,4)$. Illustre tes réponses en utilisant la situation de la question **1.** Quelles conjectures peux-tu faire ?

3. Dans le cas général

- Soit g la fonction définie par $g(x) = ax$ où a est un nombre non nul donné. (On dit que g est une fonction linéaire et a s'appelle son coefficient.) Démontre que, pour tous nombres x_1, x_2, x et k , $g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2)$ et $g(k \times x) = k \times g(x)$.
- On sait que h est une fonction linéaire et que $h(5) = 7$. En utilisant les propriétés précédentes, calcule :
 - $h(6)$ (Tu peux remarquer que $6 = \frac{6}{5} \times 5$);
 - $h(11)$ (de deux façons !).

Activité 2 : Augmentation, diminution

1. Un magasin augmente tous ses prix de 8 %.

- Calcule le prix après augmentation d'un article qui coûtait initialement 28,25 €. Un autre article coûte après augmentation 52,38 €. Quel était son prix initial ?
- Si p_1 € représente le prix d'un article avant cette augmentation et p_2 € son prix augmenté, détermine la fonction qui, au nombre p_1 , associe le nombre p_2 .
- Que peux-tu dire de cette fonction ?
- Quelle est l'image de 28,25 par cette fonction ? L'antécédent de 52,38 ?

2. La population d'un village a diminué de 15 % en trente ans. Il compte aujourd'hui 289 habitants. Quelle était sa population il y a trente ans ?

Fonction linéaire ; Fonction affine

Activité 3 : Bande de papier

On considère une bande de papier rectangulaire de dimensions 4 cm et l cm.
On s'intéresse aux variations de son périmètre en fonction de ses dimensions.

1. Recopie et complète le tableau suivant.

Valeurs de l en cm	0,5	1	2,5	4	6		10
Valeurs du périmètre en cm						25	

Quel(s) calcul(s) permet(tent) de passer des valeurs de l en centimètres aux valeurs du périmètre en centimètres ? Que peux-tu dire de ce tableau ?

2. Avec une fonction

- a.** Si l cm représente la deuxième dimension de la bande de papier et p cm son périmètre, détermine la fonction f telle que $f(l) = p$.
Cette fonction est-elle une fonction linéaire ? Justifie ta réponse.
- b.** Quelle est l'image de 2,5 par f ? Que vaut $f(10)$?
Calcule $f\left(\frac{7}{3}\right)$ puis $f(-5)$.
Quel est l'antécédent de 25 ? Détermine celui de -3 .
- c.** Compare $f(10)$ et $4 \times f(2,5)$ puis $f(10)$ et $f(4) + f(6)$.

3. Variations du périmètre

Tu pourras construire une bande de papier de largeur 4 cm et de longueur suffisante pour t'aider à répondre aux questions suivantes.

- a.** On suppose que $l = 5$ cm. Calcule le périmètre de la bande de papier.
- On augmente l de 3 cm. Le périmètre augmente-t-il ou diminue-t-il ? De combien ? Et si l augmente de 4 cm ?
 - On enlève 2 cm à l . Le périmètre augmente-t-il ou diminue-t-il ? De combien ?
- b.** Reprends la question **a.** avec cette fois-ci $l = 12,5$ cm.
- c.** Que constates-tu pour la variation du périmètre lorsqu'on a augmenté l de 3 cm ?
Semble-t-elle dépendre de la valeur de l ? Démontre-le.
- d.** Retrouves-tu les réponses de la question **c.** pour une augmentation de l de 4 cm ? Et pour une diminution de l de 2 cm ?
- e.** Recopie et complète le tableau suivant sachant que p_1 cm et p_2 cm sont les périmètres de deux bandes dont les dimensions sont 4 cm et respectivement l_1 cm et l_2 cm.

$l_1 - l_2$	0	1	1,5	3	4	-1	-2
$p_1 - p_2$							

Que peux-tu dire de ce tableau ? Justifie ta réponse.

4. Accroissement

f étant la fonction établie dans la question **2.**, x_1 et x_2 étant deux nombres quelconques, exprime $f(x_1) - f(x_2)$ en fonction de $x_1 - x_2$. Conclus.

Fonction linéaire ; Fonction affine

Activité 4 : Graphique (1)

1. On considère la fonction g définie par $g(x) = 3x$.

a. Recopie et complète le tableau de valeurs suivant.

x	- 6	- 4	- 1,5	- 1	0	1	2,5	5	7
$g(x)$									

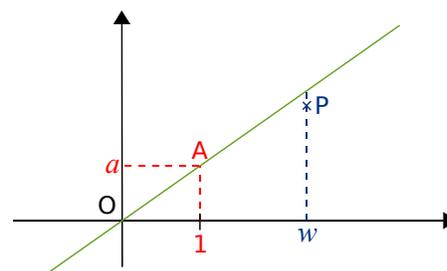
b. Sur une feuille de papier millimétré, construis un repère orthogonal et place tous les points de coordonnées $(x ; y)$ avec $y = g(x)$ que tu as obtenus grâce au tableau de la question précédente. Que constates-tu ? Pouvais-tu le prévoir ?

2. Cas général

On considère maintenant une fonction linéaire f de coefficient a (a est un nombre non nul). Dans un repère orthogonal d'origine O , on considère le point $A(1 ; a)$.

a. Démontre que si un point M de coordonnées $(r ; s)$ appartient à la droite (OA) alors $s = f(r)$.

b. Le point P ci-contre a pour coordonnées $(w ; aw)$. Est-il bien placé ? Justifie ta réponse. (Tu pourras utiliser le résultat démontré à la question précédente.)



(schéma réalisé pour a positif)

3. Coefficient

a. Lorsque le coefficient d'une fonction linéaire est négatif, que peux-tu dire de la direction de sa droite représentative ?

b. Représente, dans un repère orthogonal, la fonction h telle que $h(x) = \frac{4}{3}x$. Justifie et illustre sur le graphique la phrase : « Lorsque la différence entre les abscisses de deux points de la droite représentative de h est 3, la différence entre les ordonnées est 4. ».

c. Dans un repère orthonormé, quel lien y a-t-il entre le coefficient de la fonction linéaire et l'angle que fait la droite représentative avec l'axe des abscisses ?

Activité 5 : Graphique (2)

On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x + 3$.

1. Dans un repère orthogonal, place cinq points dont les coordonnées sont du type $(x ; y)$ avec $y = f(x)$. Que remarques-tu ?

2. Sur le même graphique, représente la fonction $g : x \mapsto 2x$.

3. Étant donnés deux points R et T de la représentation graphique de f et R_1 et T_1 les points de la droite (d_g) représentative de g ayant les mêmes abscisses que R et T , justifie que (RT) est parallèle à (R_1T_1) .

4. Justifie et illustre sur le graphique : « Lorsque la différence entre les abscisses de deux points de la représentation graphique de f est 1, la différence entre les ordonnées est 2. ».

Fonction linéaire ; Fonction affine

Activité 6 : Trouver la fonction

1. À partir d'un graphique

- Sur une feuille de papier millimétré, construis dans un repère orthogonal, la droite passant par l'origine du repère et le point de coordonnées (2 ; 6) et la droite passant par les points de coordonnées (0 ; 3) et (2 ; -1).
- En utilisant seulement le graphique et sans faire de calcul, détermine les fonctions dont ces droites sont les représentations graphiques.
- Contrôle, par le calcul, les réponses trouvées à la question précédente.
- Bakari prétend qu'à la vue du graphique précédent, un nombre et un seul a la même image par les deux fonctions trouvées. Justifie son affirmation. Détermine ce nombre graphiquement puis par le calcul.

2. Par le calcul

- Jean dit qu'il a trouvé une fonction linéaire par laquelle -8 a pour image 5 et 3 a pour image -2. Qu'en penses-tu ?
- On cherche une fonction affine f telle que $f(-2) = 5$. Chloé a trouvé les fonctions suivantes :

$$x \mapsto x^2 + 1 ; x \mapsto x + 7 ; x \mapsto \frac{-5}{2}x ; x \mapsto -2x + 1.$$

Qu'en penses-tu ? Peux-tu en trouver d'autres vérifiant les conditions ?

- $g(4) = -1$ et $g(2) = 3$ avec $g(x) = ax + b$ où a et b sont des nombres réels à trouver.
 - Écris un système d'équations dont le couple $(a ; b)$ est solution. Résous-le.
 - Ahmed dit qu'en utilisant la « proportionnalité des accroissements », il a trouvé la valeur de a très rapidement. Comment a-t-il fait ? Comment trouver la valeur de b ensuite ?

Activité 7 : Système d'équations

On considère le système d'équations $\begin{cases} -3x + y = 4 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$.

1. Montre que si le couple de nombres $(r ; s)$ est solution de la première équation alors $s = f(r)$ où f est une fonction que tu préciseras.

2. Montre que pour tout couple de nombres $(u ; v)$ solution de la deuxième équation, $v = g(u)$ où g est une fonction que tu préciseras.

3. Avec la représentation graphique

- Représente graphiquement les fonctions f et g dans un même repère orthogonal.
- Résous graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.
- Que peux-tu en déduire pour le système d'équations ci-dessus ?

4. Écris deux systèmes d'équations, l'un n'ayant pas de solution, l'autre en ayant une infinité.

Méthode 1 : Reconnaître une fonction affine ou linéaire, calculer l'image d'un nombre

À connaître

On appelle **fonction affine** toute fonction qui, à tout nombre noté x , associe le nombre $a \times x + b$ (c'est-à-dire $x \mapsto a \times x + b$) où a et b sont deux nombres.

On appelle **fonction linéaire** de coefficient a toute fonction qui, à tout nombre noté x , associe le nombre $a \times x$ (c'est-à-dire $x \mapsto a \times x$) où a est un nombre.

Remarque : Une fonction linéaire est une fonction affine particulière (cas où $b = 0$).

Exemple : Soient les fonctions f , g et h telles que $f(x) = 2x$; $g(x) = x^2 - 4$ et $h(x) = 5x - 2$. Indique, en justifiant, si les fonctions précédentes sont affines, linéaires ou ni l'un ni l'autre ; calcule ensuite l'image de 3 par la fonction f et celle de -7 par la fonction h .

- $f(x) = 2 \times x$ donc la fonction f est **linéaire** avec $a = 2$.
- La fonction g n'est ni affine ni linéaire car on doit élever x au carré.
- $h(x) = 5 \times x + (-2)$ donc la fonction h est **affine** avec $a = 5$ et $b = -2$.

- $f(3) = 2 \times 3$ On remplace x par 3.
 $f(3) = 6$ On calcule.
L'image de 3 par la fonction f est 6.
- $h(-7) = 5 \times (-7) - 2$
 $h(-7) = -37$
L'image de -7 par la fonction h est -37 .

Exercices « À toi de jouer »

1 Indique, en justifiant, si les fonctions sont linéaires, affines ou ni l'un ni l'autre.

$$f(x) = x^2 - 2 ; g(x) = 8 - 9x ; h(x) = \frac{3}{5}x ; k(x) = (13 - 8x)^2 - 64x^2 ; l(x) = \frac{2}{x}$$

2 Détermine l'image de -4 par la fonction affine h définie par $h(x) = -8x + 3$.

Méthode 2 : Déterminer, par le calcul, l'antécédent d'un nombre par une fonction affine ou linéaire

Exemple : On définit les fonctions f et g par $f(x) = 2x$ et $g(x) = 5x - 12$.

Détermine l'antécédent de 7 par la fonction f et l'antécédent de 13 par la fonction g .

On cherche le nombre x qui a pour image 7 par la fonction f . L'image de x est $f(x)$ donc on résout l'équation :

$$f(x) = 7$$

$$2x = 7$$

$$x = 3,5$$

L'antécédent de 7 par f est donc 3,5.

On cherche le nombre x qui a pour image 13 par la fonction g .

L'image de x est $g(x)$, on résout donc l'équation $g(x) = 13$ c'est-à-dire :

$$5x - 12 = 13$$

$$5x = 25$$

$$x = 5$$

L'antécédent de 13 par g est donc 5.

Exercice « À toi de jouer »

3 Détermine l'antécédent de -6 par la fonction affine h définie par $h(x) = -x + 3$.

Méthode 3 : Représenter graphiquement une fonction affine ou linéaire

À connaître

Un repère étant défini, dire qu'un point appartient à la **représentation graphique de la fonction affine** $f : x \mapsto ax + b$ signifie que ses coordonnées $(x ; y)$ vérifient la relation $y = f(x)$ c'est-à-dire $y = ax + b$.

La représentation graphique **d'une fonction affine** est **une droite**.

Dans le cas de la **fonction linéaire**, cette droite passe par l'origine du repère.

Remarque : a s'appelle le **coefficient directeur**, il indique la direction de la droite représentative : il donne l'accroissement de $f(x)$ lorsque x augmente de 1 (c'est le coefficient de proportionnalité entre les accroissements de $f(x)$ et de x).

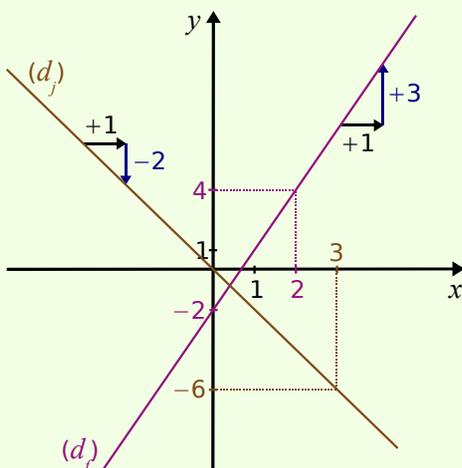
b s'appelle l'**ordonnée à l'origine** : $f(0) = b$, la droite passe par le point $(0 ; b)$.

Exemple : Représente graphiquement la fonction f définie par $f(x) = 3x - 2$ et la fonction j définie par $j : x \mapsto -2x$.

f est affine donc sa représentation graphique est une droite.
Pour tracer cette droite, il suffit de connaître deux de ses points.

On établit un tableau de valeurs en calculant les images de deux nombres.

Valeurs de x	0	2
Valeurs de $f(x)$	-2	4
Points de la droite	$(0 ; -2)$	$(2 ; 4)$



j est linéaire donc sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine du repère.

Pour tracer cette droite, il suffit de connaître un de ses points : on calcule l'image d'un nombre.

Valeur de x	3
Valeur de $j(x)$	-6
Point de la droite	$(3 ; -6)$

On trace un repère en notant l'origine, le sens et les unités sur les deux axes.

- Pour la fonction f , en violet :

on place dans le repère les points de coordonnées $(0 ; -2)$ et $(2 ; 4)$.

On trace la droite (d_f) passant par ces deux points.

- Pour la fonction j , en marron :

on place dans le repère le point de coordonnées $(3 ; -6)$.

On trace la droite (d_j) passant par ce point et l'origine du repère.

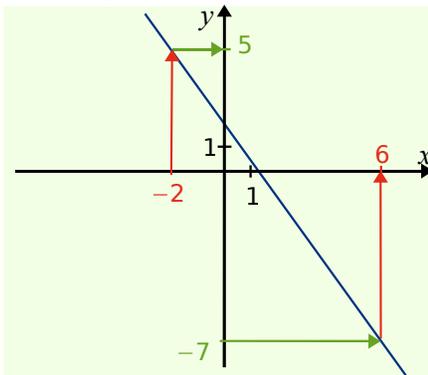
Exercices « À toi de jouer »

4 Trace les représentations graphiques des fonctions l et m définies par $l(x) = -0,5x$ et $m(x) = -0,5x + 2$. Que constates-tu ?

5 Comment tracer précisément la représentation graphique de la fonction qui, à x , associe $0,75x$?

Méthode 4 : Déterminer graphiquement l'image ou l'antécédent d'un nombre par une fonction affine ou linéaire

Exemple : Voici le graphique d'une fonction affine notée q .
Lis l'image de -2 et l'antécédent de -7 .



Pour lire l'image de -2 :

L'image de -2 est l'ordonnée du point de la droite d'abscisse -2 .
On lit approximativement 5 . Donc l'image de -2 par la fonction q est environ 5 .

Pour lire l'antécédent de -7 :

L'antécédent de -7 est l'abscisse du point de la droite d'ordonnée -7 .
On lit approximativement 6 .
Donc l'antécédent de -7 par la fonction q est environ 6 .

Exercice « À toi de jouer »

6 Lis approximativement ci-dessus l'image de 3 , celle de 0 et l'antécédent de $-3,5$.

Méthode 5 : Déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire ou affine

Exemple 1 : Détermine la fonction linéaire f telle que $f(5) = 4$.

f étant linéaire, on a $f(x) = ax$ où a est le coefficient de cette fonction à déterminer.

$f(5) = 4$ et $f(5) = 5a$ donc $5a = 4$. On en déduit $a = \frac{4}{5}$ et f est définie par $f(x) = \frac{4}{5}x$.

Exemple 2 : Détermine la fonction affine g telle que $g(5) = 4$ et $g(-2) = 25$.

La fonction g est affine donc $g(x) = ax + b$ où a et b sont à déterminer.

$$g(5) = 4 \text{ et } g(5) = 5a + b \text{ donc } 5a + b = 4.$$

$$g(-2) = 25 \text{ et } g(-2) = -2a + b \text{ donc } -2a + b = 25.$$

$$\text{Donc } \begin{cases} 5a + b = 4 \\ -2a + b = 25 \end{cases}$$

On résout donc le système et on obtient $a = -3$ et $b = 19$. Ainsi g est définie par :
 $g(x) = -3x + 19$.

Remarque : a est le coefficient de proportionnalité entre les accroissements de $g(x)$ et de x donc, pour tous nombres x_1 et x_2 distincts, $a = \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}$.

Donc, ici, $a = \frac{g(-2) - g(5)}{-2 - 5} = \frac{25 - 4}{-2 - 5} = \frac{21}{-7} = -3$ et $g(x) = -3x + b$.

b s'obtient ensuite en utilisant $g(5) = 4$ ou $g(-2) = 25$.

Exercice « À toi de jouer »

7 Détermine la fonction affine h telle que l'image de -5 soit égale à 12 et celle de 4 soit égale à -7 .