Puissance

Activité 1 : Produits et quotients de puissances d'un même nombre

1. Rappels et conjectures

a. Recopie et complète les égalités suivantes vues en 4ᵉ.

> Pour tous entiers relatifs m et p, on a :
>
> $10^m \times 10^p = 10^{\cdots}$; $\dfrac{10^m}{10^p} = 10^{\cdots}$; $\left(10^m\right)^p = 10^{\cdots}$ et $10^0 = \ldots.$.

b. À l'aide de la définition d'une puissance, calcule 3^2 ; 3^5 ; 3^7 ; 3^{-2} ; 3^{12} et 3^{14}.

c. Déduis-en les valeurs de $3^2 \times 3^5$; $3^7 \times 3^{-2}$; $3^{12} \times 3^2$; $\dfrac{3^7}{3^5}$; $\dfrac{3^{12}}{3^5}$ et $\left(3^7\right)^2$.

Que remarques-tu ? Invente d'autres exemples similaires.

d. Conjecture les règles de calculs avec des puissances d'un même nombre.

Pour la suite, dans les parties **2.**, **3.** et **4.**, a est un nombre non nul et m et p sont deux entiers naturels non nuls.

2. Cas où les deux exposants sont positifs

a. Recopie et complète l'expression $a^m \times a^p = \underbrace{\underbrace{a \times \ldots \times a}_{\ldots \text{ facteurs}} \times \underbrace{a \times \ldots \times a}_{\ldots \text{ facteurs}}}_{\ldots \text{ facteurs au total}} = a^{\cdots}$.

b. On suppose que $m \geqslant p > 0$. À l'aide de la définition d'une puissance, établis l'égalité $\dfrac{a^m}{a^p} = a^{\cdots\cdot}$. Que se passe-t-il lorsque $p \geqslant m \geqslant 0$?

c. En utilisant la définition d'une puissance, démontre la formule $\left(a^m\right)^p = a^{m \times p}$.

3. Cas où l'un des deux exposants est négatif

a. En utilisant la définition d'une puissance négative et les égalités trouvées dans la partie **2.**, détermine les relations $a^m \times a^{-p} = a^{\cdots}$; $\dfrac{a^m}{a^{-p}} = a^{\cdots}$ et $\left(a^m\right)^{-p} = a^{\cdots}$.

b. Que peux-tu dire des expressions $a^{-m} \times a^p$; $\dfrac{a^{-m}}{a^p}$ et $\left(a^{-m}\right)^p$?

4. Cas où les deux exposants sont négatifs

En t'aidant des parties **2.** et **3.**, recopie et complète les égalités $a^{-m} \times a^{-p} = a^{\cdots}$; $\dfrac{a^{-m}}{a^{-p}} = a^{\cdots}$ et $\left(a^{-m}\right)^{-p} = a^{\cdots}$.

5. Conclusion

Recopie et complète.

> Pour tout nombre a non nul et pour tous nombres entiers relatifs m et p :
>
> $a^m \times a^p = a^{\cdots}$; $\dfrac{a^m}{a^p} = a^{\cdots}$ et $\left(a^m\right)^p = a^{\cdots}$.

Puissance

Activité 2 : Produits et quotients de puissances de nombres différents et de même exposant

1. Produit

a. Noémie effectue de tête le calcul $2^6 \times 5^6$. Elle annonce son résultat : « Un million ! ». Est-il correct ? Comment a-t-elle fait ?

b. En utilisant la définition d'une puissance d'un nombre, écris les nombres suivants sous forme d'une seule puissance : $7^2 \times 3^2$; $2^3 \times 4^3$. Invente d'autres exemples similaires.

c. Existe-t-il des exemples de produits de puissances qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme d'une seule puissance ? Justifie ta réponse.

d. Soient a et b deux nombres non nuls et n un entier positif. En utilisant la définition d'une puissance d'un nombre, démontre l'égalité $a^n \times b^n = (a \times b)^n$.
Que peux-tu dire si n est un entier négatif ?

2. Quotient

a. En utilisant la définition des puissances, transforme les nombres suivants en quotients de puissances : $\left(\frac{7}{3}\right)^2$; $\left(\frac{2}{11}\right)^4$ et $\left(\frac{-1}{9}\right)^5$.

b. Quelle formule viens-tu de vérifier sur ces exemples ? Démontre-la.

Activité 3 : Changeons d'unités

1. Surface

a. Un champ rectangulaire mesure 455 mètres de long et 8 décamètres de large. Quelle est sa superficie en mètres carrés ? En décamètres carrés ? En hectomètres carrés ?

b. Recherche la définition d'un are et d'un hectare. Exprime alors la superficie du champ dans chacune de ces deux unités.

2. Masses volumiques

a. Une pièce métallique en cuivre a un volume de 2,5 dm^3 et une masse de 22,3 kg.
De plus, on sait que 1 kg d'aluminium occupe un volume de 370 cm^3 et que la masse volumique de l'acier est de 7 850 kg/m^3. Calcule, en kg, la masse d'un décimètre cube de chacun de ces métaux.

b. Une entreprise souhaite construire, pour un modèle de vélo, des cadres métalliques qui soient les plus légers possibles. Quel métal parmi le cuivre, l'aluminium et l'acier a-t-elle intérêt à choisir ? Justifie ta réponse.

3. Mécanique

a. Pour ne pas abîmer le moteur d'une voiture, le constructeur préconise de ne pas dépasser les 4 000 tours par minute. Explique ce que signifie l'expression « 4 000 tours par minute ».

b. Si le moteur effectue 4 000 rotations en une minute, combien en effectuera-t-il en une seconde ? Tu arrondiras ton résultat au centième.

c. Exprime alors cette vitesse de rotation en tours par seconde.

Méthode 1 : Utiliser les formules sur les puissances

À connaître

Pour tout nombre relatif a non nul et pour tous nombres entiers relatifs m et p :

$$a^m \times a^p = a^{m+p} \quad ; \quad \frac{a^m}{a^p} = a^{m-p} \quad \text{et} \quad \left(a^m\right)^p = a^{m \times p}.$$

Exemple 1 : Écris les expressions suivantes sous la forme a^n où a est un nombre relatif non nul et n un entier relatif.

$A = 5^7 \times 5^4$; $B = \dfrac{(-2)^{-5}}{(-2)^{-6}}$; $C = \left(0{,}2^{-3}\right)^4$; $D = \pi^2 \times \pi^{-3} \times \pi$.

$A = 5^7 \times 5^4 = 5^{7+4} = 5^{11}$

$B = \dfrac{(-2)^{-5}}{(-2)^{-6}} = (-2)^{-5-(-6)} = (-2)^{-5+6} = (-2)^1 \ (= -2)$

$C = \left(0{,}2^{-3}\right)^4 = 0{,}2^{-3\times 4} = 0{,}2^{-12}$

$D = \pi^2 \times \pi^{-3} \times \pi = \pi^{2+(-3)+1} = \pi^0 \ (= 1)$

Exemple 2 : Écris le nombre $E = \dfrac{(-2)^4 \times 4^{-5}}{8^{-3}}$ sous la forme d'une puissance de 2.

$E = \dfrac{(-2)^4 \times \left(2^2\right)^{-5}}{\left(2^3\right)^{-3}}$ ⟶ On remplace 4 par 2^2 et 8 par 2^3.

$E = \dfrac{2^4 \times 2^{-10}}{2^{-9}}$ ⟶ On remarque que $(-2)^4 = 2^4$ et on applique les règles sur les puissances.

$E = 2^{4+(-10)-(-9)}$

$E = 2^{4-10+9}$

$E = 2^3$ ⟶ On donne l'écriture demandée par l'énoncé.

À connaître

Pour tous nombres relatifs a et b non nuls et pour tout nombre entier relatif n :

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n \quad \text{et} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Exemple : Écris les expressions suivantes sous la forme a^n où a est un nombre relatif non nul et n un entier relatif.

$F = 2^3 \times 5^3$; $G = \dfrac{1{,}5^{-5}}{0{,}5^{-5}}$; $H = (-6)^{-5} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-5}$; $I = \dfrac{\pi^4}{7^4}$.

$F = 2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3 = 10^3$

$G = \dfrac{1{,}5^{-5}}{0{,}5^{-5}} = \left(\dfrac{1{,}5}{0{,}5}\right)^{-5} = 3^{-5}$

$H = (-6)^{-5} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-5} = \left(-6 \times \dfrac{1}{3}\right)^{-5} = (-2)^{-5}$

$I = \dfrac{\pi^4}{7^4} = \left(\dfrac{\pi}{7}\right)^4$

Exercice « À toi de jouer »

1 Écris les expressions suivantes sous la forme a^n où a est un nombre relatif non nul et n un entier relatif.

$J = 5^4 \times 7^4$; $K = \dfrac{2^{-5} \times 3^8}{(-3)^6 \times 2^{-7}}$; $L = \left(5^{-2}\right)^3 \times \left(\dfrac{5}{3}\right)^4 \times 3^2$; $M = \dfrac{12^5}{3^2 \times 6^3}$.

Méthode 2 : Effectuer des changements d'unités de grandeurs produits ou quotients

Exemple 1 : Le 3 avril 2007, la rame TGV d'essai n°4402 établissait un nouveau record de vitesse officiel de 574,8 $km \cdot h^{-1}$. Convertis cette vitesse en $m \cdot s^{-1}$.

574,8 $km \cdot h^{-1}$ signifie que l'on parcourt 574,8 km en 1 h.

Ainsi, 574,8 $km \cdot h^{-1} = \dfrac{574{,}8 \text{ km}}{1 \text{ h}}$.

574,8 km = 574 800 m et 1 h = 3 600 s.

Donc 574,8 $km \cdot h^{-1} = \dfrac{574\,800 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = \dfrac{574\,800}{3\,600} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = \dfrac{479}{3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 159{,}7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

La vitesse de cette rame de TGV était alors d'environ 159,7 $m \cdot s^{-1}$.

Exemple 2 : La vitesse de rotation du disque dur d'un ordinateur est de 7 200 tours/min. Convertis cette vitesse de rotation en tours par seconde.

7 200 tours/min signifie qu'en une minute, la partie rotative du disque dur effectue 7 200 tours autour de son axe.
1 min = 60 s.

Donc 7 200 tours/min $= \dfrac{7\,200 \text{ tours}}{1 \text{ min}} = \dfrac{7\,200 \text{ tours}}{60 \text{ s}} = \dfrac{7\,200}{60}$ tours/s = 120 tours/s.

La vitesse de rotation du disque dur est de 120 tours/s.

Exemple 3 : La masse volumique du fer vaut 7,84 $g \cdot cm^{-3}$. Convertis-la en $kg \cdot m^{-3}$.

« La masse volumique du fer vaut 7,84 $g \cdot cm^{-3}$ » signifie que 1 cm^3 de fer a une masse de 7,84 g. Ainsi, 7,84 $g \cdot cm^{-3} = \dfrac{7{,}84 \text{ g}}{1 \text{ cm}^3}$.

7,84 g = 0,007 84 kg et 1 cm^3 = 0,000 001 m^3.

Donc 7,84 $g \cdot cm^{-3} = \dfrac{0{,}007\,84 \text{ kg}}{0{,}000\,001 \text{ m}^3} = \dfrac{0{,}007\,84}{0{,}000\,001} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} = 7\,840 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

La masse volumique du fer vaut donc 7 840 $kg \cdot m^{-3}$.

Exemple 4 : Combien de litres d'eau faut-il pour remplir à ras bord une piscine de 75 m^3 ?

75 m^3 = 75 × 1 m^3 = 75 × (1 m × 1 m × 1 m) = 75 × (10 dm × 10 dm × 10 dm).
10 dm × 10 dm × 10 dm = 10^3 × 1 dm^3 = 1 000 dm^3.
Donc 75 m^3 = 75 × 1 000 dm^3 = 75 000 dm^3.
Comme 1 dm^3 = 1 L, il faut 75 000 L d'eau pour remplir cette piscine.

Exemple 5 : Une unité industrielle d'énergie est le mégawattjour (MWj) soit l'énergie correspondant à une puissance d'un mégawatt (MW) fournie pendant un jour.
Sachant que 1 MW = 10^6 W, détermine le nombre de kilowattheures (kWh) qui correspond à un mégawattjour.

1 MW = 10^6 W = 1 000 000 W = 1 000 kW et 1 j = 24 h.
Donc 1 MWj = 1 MW × 1 j = 1 000 kW × 24 h = 24 000 kWh.
Donc 1 MWj correspond à 24 000 kWh.

Exercices « À toi de jouer »

2 La vitesse de propagation du son dans l'air est d'environ 340 m/s. Convertis cette vitesse en km/h.

3 La masse volumique de l'air au niveau de la mer et à une température de 20°C est d'environ 1,2 $kg \cdot m^{-3}$. Convertis cette masse volumique en $g \cdot cm^{-3}$.

4 La puissance maximale de certains moteurs de voitures de Formule 1 approche dans certains cas les 900 chevaux et leur vitesse de rotation peut atteindre les 20 000 tours par minute. Calcule la vitesse de rotation de ces moteurs en tours par seconde.