



Fiche : intégrales

Définition :

Si la fonction f est continue sur I , le réel $F(b) - F(a)$ est indépendante de la primitive F de f choisie. On l'appelle l'intégrale de f prise entre les valeurs a et b et on la note $\int_a^b f(x)dx$ qui se lit "Somme de a à b de $f(x)dx$ ".

Notation : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Remarque : $\int_a^b dx = b - a$ et $\int_a^b k dx = b - a$, k réel constant.

Propriétés :

- Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I contenant les réels a , b et c et si k est un réel constant alors :

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b k f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

- Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a et b .

Si $\rightarrow$ et $\downarrow$	Pour tout x de I , $f(x) \geq 0$	Pour tout x de I , $f(x) \leq 0$
$a \leq b$	$\int_a^b f(x)dx \geq 0$	$\int_a^b f(x)dx \leq 0$
$a \geq b$	$\int_a^b f(x)dx \leq 0$	$\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Soit f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I contenant a et b .

Si $\rightarrow$ et $\downarrow$	Pour tout x de I , $f(x) \leq g(x)$	Pour tout x de I , $f(x) \geq g(x)$
$a \leq b$	$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$	$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Inégalité de la moyenne :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a et b .

Si $a \leq b$ et pour tout x de $[a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

Si $a \leq b$ et pour tout x de $[a, b]$, $|f(x)| \leq k$ alors $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq k|b-a|$



Fiche : intégrales

Valeur moyenne d'une fonction :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, avec $a < b$, alors on appelle valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a; b]$ le réel $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Intégration par parties :

Si u et v sont dérivables sur $[a; b]$ alors $\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$

Calcul d'aires :

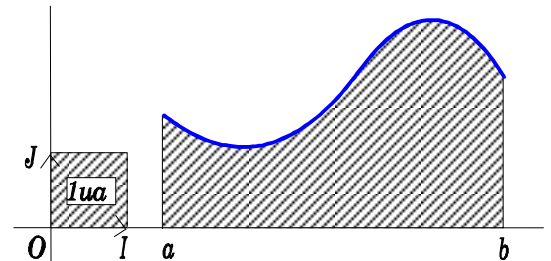
Unité d'aires

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ avec $\vec{i} = \vec{OI}$ et $\vec{j} = \vec{OJ}$.

L'unité d'aire sera $OI \times OJ$, aire du rectangle ayant pour côtés les segments $[OI]$ et $[OJ]$.

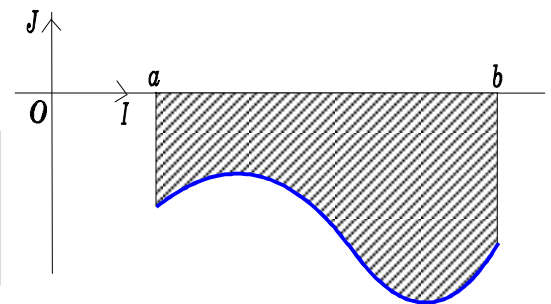
Théorème 1 :

Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a, b]$. L'aire, en ua, de la partie ($\mathcal{D}$) du plan limitée par la courbe (C) de f et les droites d'équations respectives $x = a$, $x = b$ et l'axes des abscisses est $\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx$



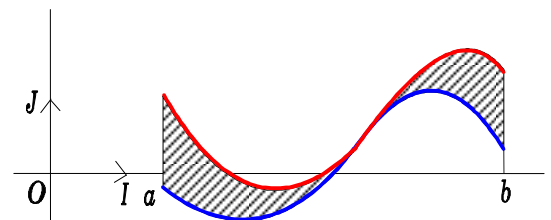
Théorème 2 :

Soit f une fonction continue et négative sur l'intervalle $[a, b]$. L'aire, en ua, de la partie ($\mathcal{D}$) du plan limitée par la courbe (C) de f et les droites d'équations respectives $x = a$, $x = b$ et l'axes des abscisses est $\mathcal{A} = -\int_a^b f(x) dx$



Théorème 3 :

Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$. L'aire, en ua, de la partie ($\mathcal{D}$) du plan limitée par la courbe (C) de f , la courbe (C') de g et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$ est $\mathcal{A} = \int_a^b |g(x) - f(x)| dx$.



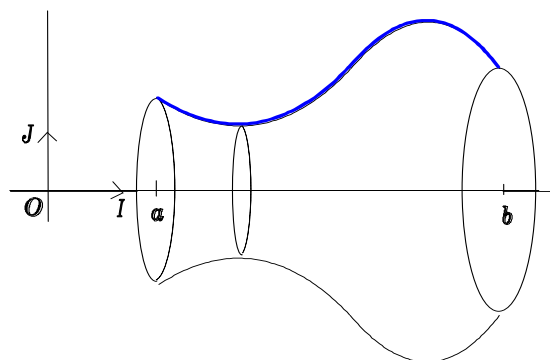


Fiche : intégrales

Calcul de volume :

L'espace est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ avec $\vec{i} = \vec{OI}$, $\vec{j} = \vec{OJ}$ et $\vec{k} = \vec{OK}$.

L'unité de volume sera $OI \times OJ \times OK$, volume du parallélépipède ayant pour côtés les segments $[OI]$, $[OJ]$ et $[OK]$.



Cas particulier du solide de révolution engendré par la rotation autour de **l'axe des abscisses** d'un domaine limité par une courbe $y = f(x)$.

Théorème :

Si f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a, b]$ et (S) l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$ alors le volume, en uv, engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses par

le domaine (S) est $V(S) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$