Droites - Plans - Sphères

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

I- Représentations paramétriques d'une droite de l'espace :

Soit A($A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ un point de l'espace et $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur non nul.

Une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est le système :

$$\begin{cases}x = x_A + a\alpha\\ y = y_A + b\alpha \quad , \alpha \in \mathbb{R}\\ z = z_A + c\alpha\end{cases}$$

Exemple 1:

1.Déterminer une **représentation paramétrique** de la droite (Δ) passant par le point A(1 ; 5 ; - 3) et perpendiculaire au plan (P) d'équation x + 2y - z + 4 = 0 .

Le plan (P) admet comme **vecteur normal** $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

la droite (Δ) est perpendiculaire au plan (P) donc le vecteur $\vec{u}$ est un **vecteur directeur de** (Δ).

Donc, connaissant **un point** A **et un vecteur directeur** $\vec{u}$, une **représentation paramétrique** de (Δ) est : $\begin{cases}x = 1+t\\ y = 5+2t \quad , t \in \mathbb{R}\\ z = -3-t\end{cases}$

2. Les points B(2, 3, -4) et C(-1, 1, -1) sont-ils sur la droite (Δ) ?

Cela revient à chercher s'il existe une valeur du **paramètre** t tel que : $\begin{cases}1+t = 2\\ 5+2t = 3\\ -3-t = -4\end{cases}$

Droites - Plans - Sphères

puis s'il existe une valeur du paramètre t tel que $\begin{cases} 1+t=-1 \\ 5+2t=1 \\ -3-t=-2 \end{cases}$

Or $\begin{cases} 1+t=2 \\ 5+2t=3 \\ -3-t=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-1 \\ -3-t=-4 \end{cases}$ *impossible* donc B(2, 3, -4) $\notin (\Delta)$.

D'autre part $\begin{cases} 1+t=-1 \\ 5+2t=1 \\ -3-t=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-2 \\ t=-2 \\ t=-2 \end{cases} \Leftrightarrow t=-2$ donc C(-1, 1,-1) $\in (\Delta)$.

Exemple 2:

On désigne par (D) et (D') les droites de l'espace définies chacune par une **représentation paramétrique** :

D : $\begin{cases} x=t-3 \\ y=2t-10 \\ z=-t+5 \end{cases}$, t$\in \mathbb{R}$ et D' : $\begin{cases} x=-k-1 \\ y=k \\ z=k+3 \end{cases}$, k $\in \mathbb{R}$.

1. Donner les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ directeur de (D) et d'un vecteur $\vec{u'}$ directeur de (D').

D'après les **représentations paramétriques** des deux droites, les coefficients du paramètre t sont (1,2,-1) donc $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un **vecteur directeur** de (D) et les coefficients du paramètre k sont (-1,1,1) donc $\vec{u'}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un **vecteur directeur** de (D').

2. Démontrer que les droites (D) et (D') sont sécantes en un point A dont on donnera les coordonnées.

Droites - Plans - Sphères

Cela revient à chercher la valeur du **paramètre** t et celle du **paramètre** k tel que :

$$\begin{cases} t-3=-k-1 \\ 2t-10=k \\ -t+5=k+3 \end{cases}.$$

En substituant la valeur de k de la deuxième équation dans la première et la troisième on obtient : $\begin{cases} t-3=-2t+10-1 \\ 2t-10=k \\ -t+5=2t-10+3 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} t=4 \\ k=-2 \\ t=4 \end{cases}$.

Donc le point d'intersection de (D) et (D') est le point de (D) correspondant à la valeur 4 du **paramètre** t ou le point de (D') correspondant à la valeur -2 du **paramètre** k . Ainsi $D \cap D'$ = { A(1 ; - 2 ; 1)}

II- Equations cartésienne d'un plan de l'espace :

a, b, c et d sont quatre réels donnés tel que a, b et c ne sont pas tous nuls à la fois.

L'ensemble (P) des points M(x, y, z) de l'espace tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

<u>Exemple 1:</u>

Rechercher un vecteur normal puis une équation cartésienne du plan (P) déterminé par les deux droites D : $\begin{cases} x=t-3 \\ y=2t-10 \\ z=-t+5 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et D' : $\begin{cases} x=-k-1 \\ y=k \\ z=k+3 \end{cases}$, k $\in \mathbb{R}$.

Comme les droites de l'espace (D) et (D') sont sécantes en A(1, -2, 1), elle sont **coplanaires**.

Un **vecteur normal** du plan (P) contenant les droites (D) et (D') est $\vec{u} \wedge \vec{u}'$.

On a alors : $\vec{u} \wedge \vec{u}'\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ d'où $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un **vecteur normal au plan** (P) .

On en déduit une équation de ce plan : x + z + d = 0 .

Droites - Plans - Sphères

Or A(1 ; - 2 ; 1) est un point de ce plan d'où 1 + 1 + d = 0 ; on en déduit que d = - 2.

Donc une équation de ce plan (P) est : x + z - 2 = 0.

Exemple 2:

On considère, dans l'espace, le plan (P_1) d'équation : x - 2y + 2z - 1 = 0 et le plan (P_2) d'équation : x – 3y + 2z + 2 = 0.

1. Montrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.

Le vecteur $\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ est un **vecteur normal** de (P_1).

Le vecteur $\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ est un **vecteur normal** de (P_2).

Les vecteurs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont **pas colinéaires** car $\frac{1}{1} \neq \frac{-2}{-3}$ donc les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.

On notera (D) leur droite d'intersection.

2. Justifier que le point I(1 ; 3 ; 3) appartient à cette droite (D) d'intersection.

I est un point de (P_1) car $1 - 2\times3 + 2\times3 - 1 = 0$.

I est un point de (P_2) car $1 - 3\times3 + 2\times3 + 2 = 0$.

Donc I appartient à (D), la droite d'intersection des deux plans.

3. Démontrer que le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ est un **vecteur directeur** de la droite (D).

Comme (D) est à l'intersection des plans (P_1) et (P_2), tout vecteur directeur de (D) est orthogonal à tout vecteur normal de (P_1) et à tout vecteur normal de (P_2).

$\vec{u}\cdot\vec{n_1} = 2\times1 + 0\times(-2) + (-1)\times2 = 0$ d'où $\vec{u} \perp \vec{n_1}$

$\vec{u}\cdot\vec{n_2} = 2\times1 + 0\times(-3) + (-1)\times2 = 0$ d'où $\vec{u} \perp \vec{n_2}$

Droites - Plans - Sphères

Donc $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ est un **vecteur directeur** de (D).

Exemple 3:

Déterminer la distance du point A(1 ; 2 ; 2) à la droite (D) de représentation paramétrique : $\begin{cases}x=1+2t\\y=3\\z=3-t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

On a : M(2t +1 ; 3 ; - t + 3) est un point quelconque de (D).

En prenant : t = 0 , on obtient : B(1, 3, 3) un point de la droite (D).

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D).

La distance de A à la droite (D) est donnée par la formule

$$d(A,D)=\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}=\frac{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}}{\sqrt{2^2+0^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

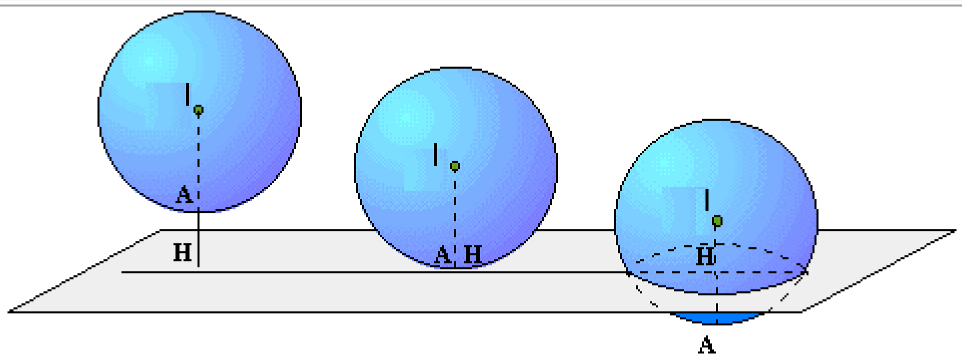
III- Positions relatives d'un plan et d'une sphère:

Une équation de la sphère (S) de centre $I(x_0,y_0,z_0)$ et de rayon R est $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

Le point H est le projeté orthogonal de I sur le plan (P). La distance IH est donc la distance du point I au plan (P). Le point A est le point d'intersection de (IH) et de la sphère.

Nous avons donc: IA = R

Droites - Plans - Sphères



IH > R	IH = R	IH < R
Le plan (P) et la sphère (S) sont disjoints. $S \cap P = \varnothing$	Le plan et la sphère (S) sont tangents en A. $S \cap P = \{A\}$ $\{A\} = \Delta \cap P$ où Δ est la perpendiculaire au plan passant par I.	Le plan (P) et la sphère (S) sont sécants suivant un cercle ($\mathcal{C}$) de centre H et de rayon r. $S \cap P = \mathcal{C}(H, r)$ $r = \sqrt{R^2 - OH^2}$ $\{A\} = \Delta \cap P$ où Δ est la perpendiculaire au plan passant par I.

Exemples:

1. Soit la sphère (S) : $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 1$ et le plan (P) : $2x - 2y + z + 4 = 0$.

Montrer que (P) est tangent à la sphère (S) en un point A dont on précisera les coordonnées.

Le centre de la sphère (S) est le point I(-2, 1, -1) et son rayon est R = 1.

$d(I,P) = \dfrac{|-4-2-1+4|}{\sqrt{4+4+1}} = 1 = R$ donc **(P) est tangent à (S).**

Soit $\{A\} = S \cap P$ et (Δ) la perpendiculaire au plan passant par I .

On donc $\{A\} = \Delta \cap P$.

Un vecteur directeur $\vec{u}$ de (Δ) est un vecteur normal à (P) dont $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Droites - Plans - Sphères

Il en résulte que, $\Delta : \begin{cases} x = -2 + 2\alpha \\ y = 1 - 2\alpha \\ z = -1 + \alpha \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. D'où $A(-2+2\alpha, 1-2\alpha, -1+\alpha)$.

Pour que A appartienne à (P), il faut et il suffit que

$2(-2+2\alpha) - 2(1-2\alpha) + (-1+\alpha) + 4 = 0 \Leftrightarrow 9\alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{3}$.

Ainsi, $A\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

2. Soit la sphère (S) de centre I(2, 0, 0) et de rayon 2 et le plan (P) d'équation x = 1. Montrer que (P) coupe la sphère suivant un cercle ($\mathcal{C}$) dont on précisera le centre et le rayon.

On a $d(I,P) = \frac{|2-1|}{\sqrt{1+0+0}} = 1 < 2$ donc $P \cap S$ est un cercle ($\mathcal{C}$) de centre H et de rayon r.

$r = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$.

Le centre I de ($\mathcal{C}$) est donc le point d'intersection de la perpendiculaire (Δ) au plan (P) passant par I avec le plan (P).

Un vecteur directeur de (Δ) est $\vec{j}$ un vecteur normal à (P) d'où une représentation paramétrique de (Δ) est $\begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, $\beta \in \mathbb{R}$.

$J(2+\alpha, 0, 0) \in (P) \Leftrightarrow 2 + \alpha = 1$, il en résulte que J(1,0,0).