Exercice 1 :

1. Développer $A=\left(2-\sqrt{2}\right)^3$.
2. Factoriser $B=\left(x+2\right)^3-\left(20-14\sqrt{2}\right)$.

Exercice 2 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\frac{1}{3}x+2=0$; b) $\frac{x-1}{3}-\frac{4x-3}{6}=\frac{1-x}{2}$; c) $x^3-x^2-9\left(x-1\right)=0$

Exercice 3 :

Soit ABCD un parallélogramme de centre O.

1. Construire les points E et F tels que $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{OC}$.
2. Montrer que C est le milieu de [EF].

Exercice 4 :

Soit x un angle aigu.

1. Montrer que $\frac{1}{1+\tan^2 x}+\sin^2 x=1$.
2. On donne $\tan x=\frac{3}{4}$, calculer $\sin x$ et $\cos x$.

Corrigé

Exercice 1 :

1. Rappelons que, pour tout réels a et b, on a : $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

$$A = \left(2-\sqrt{2}\right)^3 = 2^3 - 3\times 2^2 \times \sqrt{2} + 3\times 2\times\left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^3 = 8 - 12\sqrt{2} + 12 - 2\sqrt{2} = 8 - 14\sqrt{2}.$$

2. Rappelons que, pour tout réels a et b, on a : $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$.

$$B = (x+2)^3 - \left(20 - 14\sqrt{2}\right) = (x+2)^3 - \left(2-\sqrt{2}\right)^3$$

Donc $B = \left(x+\sqrt{2}\right)\left[(x+2)^2 + (x+2)\left(2-\sqrt{2}\right) + \left(2-\sqrt{2}\right)^2\right]$

$$= \left(x+\sqrt{2}\right)\left[\left(x^2+4x+4\right) + \left(2-\sqrt{2}\right)x + 4 - 2\sqrt{2} + \left(6-4\sqrt{2}\right)\right]$$

$$= \left(x+\sqrt{2}\right)\left[x^2 + \left(6-\sqrt{2}\right)x + 14 - 6\sqrt{2}\right]$$

Exercice 2 :

a) $\frac{1}{3}x + 2 = 0$ équivaut à $\frac{1}{3}x = -2$ d'où $x = -6$ donc S= {-6}.

b) $\frac{x-1}{3} - \frac{4x-3}{6} = \frac{1-x}{2}$ équivaut à $6\times\left(\frac{x-1}{3} - \frac{4x-3}{6}\right) = 6\times\left(\frac{1-x}{2}\right)$

équivaut à $2(x-1) - (4x-3) = 3(1-x)$

équivaut à $-2x+1 = 3-3x$

équivaut à $x = 2$

Donc S = {2}.

c) $x^3 - x^2 - 9(x-1) = 0$ équivaut à $x^2(x-1) - 9(x-1) = 0$

équivaut à $(x-1)\left(x^2-9\right) = 0$

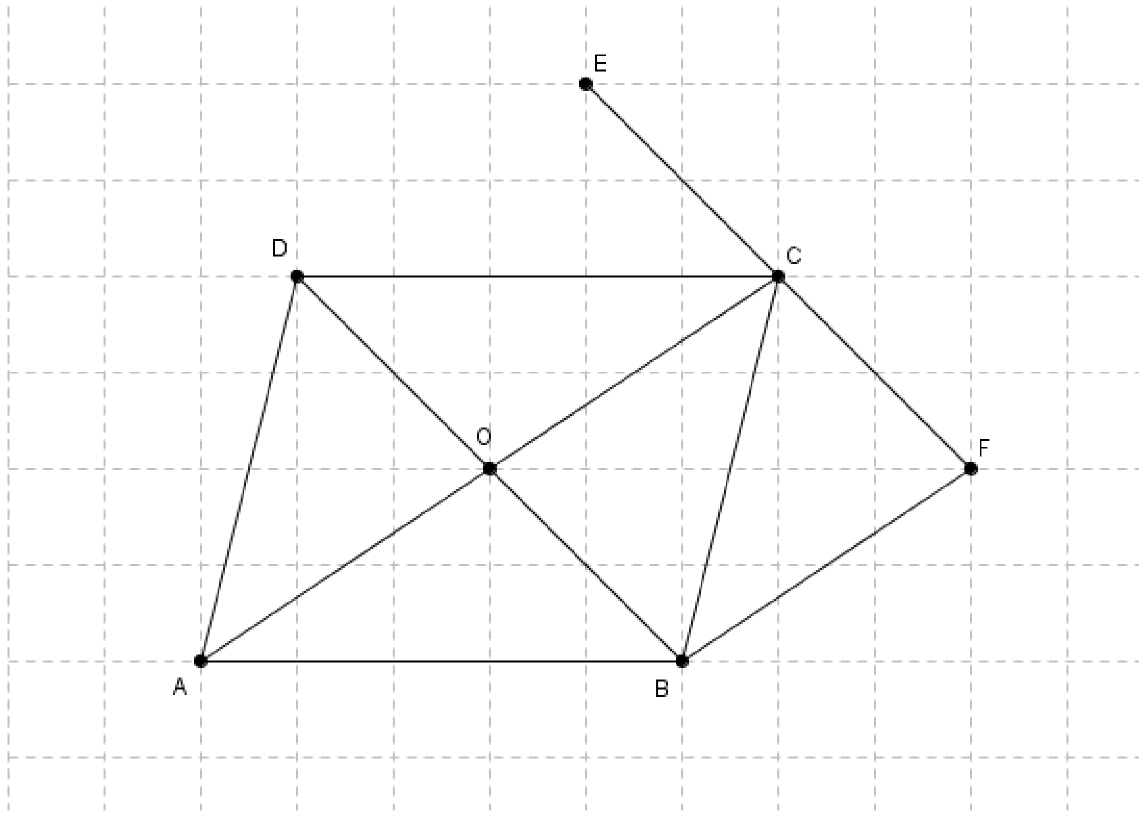
équivaut à $x - 1 = 0$ ou $x^2 - 9 = 0$

équivaut à $x = 1$ ou $x = -3$ ou $x = 3$.

Donc S = {-3, 1, 3}.

Exercice 3

1.



2. On a : $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{OD}$ et O milieu de [BD] donc $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BO}$.

D'autre part : $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{OC}$ donc BFCO est un parallélogramme d'où $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{BO}$.

Ainsi, on obtient : $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{CE}$ d'où C est le milieu de [EF].

Exercice 4

1. Rappelons que $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, d'où $1+\tan^2 x = 1+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

   Il en résulte : $\dfrac{1}{1+\tan^2 x}+\sin^2 x = \cos^2 x+\sin^2 x = 1$.

2. Si $\tan x = \dfrac{3}{4}$ alors $\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}+\sin^2 x = 1$ d'où $\dfrac{16}{25}+\sin^2 x = 1$ ou encore $\sin^2 x = \dfrac{9}{25}$.

   Par conséquent : $\sin x = \dfrac{3}{5}$ et $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{\dfrac{16}{25}} = \dfrac{4}{5}$.