

A la demande de quelques aimables élèves qui se reconnaîtront !Exercice n°1 :

Dans cet exercice la justification n'est demandée. On répondra à chaque question.

- Chaque réponse exacte rapporte 1 point.
- Chaque réponse inexacte enlève 0,25 point.
- Une question sans réponse enlève 0,5 point .
- Si le total est négatif, il est ramené à zéro.

Pour chaque question, donner la seule réponse exacte

Soit f une fonction définie et continue sur $] -6 ; -3[\cup] -3 ; +\infty [$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous et (C) sa représentation graphique dans un repère.

x	- 6	-4	-3,5	-3	2	$+\infty$					
variations de f	7	↗	8	↘	0	$-\infty$	$+\infty$	↘	3	↗	5

1. On peut affirmer que :

- a) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = +\infty$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$ c) $\lim_{x \rightarrow -6} f(x) = -\infty$ d) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = 0$

2. (C) admet pour asymptotes les droites d'équation :

- a) $x = 5$ et $y = -3$ b) $y = 8$ et $y = 3$ c) $x = -3$ et $y = 5$ d) $x = -6$ et $y = 5$

3. Dans l'ensemble $] -6 ; -3[\cup] -3 ; +\infty [$, l'équation $f(x) = 4$ admet exactement :

- a) 0 solution b) 1 solution c) 2 solutions d) 3 solutions

Exercice 2

Soient A, B, C, D et E cinq points du plan tels que :

$$\left(\widehat{AB,AE}\right) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi], \left(\widehat{BA,BE}\right) \equiv \frac{2\pi}{5}[2\pi] \text{ et } \left(\widehat{EA,EC}\right) \equiv \frac{\pi}{15}[2\pi]$$

(la figure n'est pas demandée)

1. Déterminer la mesure principale de l'angle (\vec{AE}, \vec{EC}) .
2. Déterminer la mesure principale de l'angle (\vec{EB}, \vec{AB}) .
3. En déduire la mesure principale de l'angle (\vec{EB}, \vec{EC}) .

Que peut-on en déduire pour le triangle BEC ?

Exercice 3

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 4 et AC = 3. Soit I le milieu de [AB] et J celui de [IC].

Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan vérifiant l'égalité (1) : $MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = 66$.

On se propose de déterminer la nature de l'ensemble (Γ) de deux façons.

Partie A - 1^{ère} méthode

1. Montrer que $B \in (\Gamma)$.
2. En utilisant deux fois le théorème de la médiane, démontrer que :

$$M \in (\Gamma) \text{ si et seulement si : } 4MJ^2 + \frac{1}{2}AB^2 + IC^2 = 66.$$

3. En déduire la nature et les éléments caractéristique de (Γ) et le représenter.

Partie B - 2^{ème} méthode

On utilise le repère orthonormé $\left(A; \frac{1}{4}\vec{AB}, \frac{1}{3}\vec{AC}\right)$.

1. a) Déterminer les coordonnées des points B et C.
b) En utilisant l'égalité (1), déterminer une équation de (Γ) dans ce repère.
2. Retrouver la nature et les éléments caractéristique de (Γ) trouvés avec la première méthode.

Exercice n°1 :

1. b) est la réponse exacte

En effet :

- a) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5)$ puis que f est continue en 5. **1. a) est une réponse fausse.**
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$ **1. b) est la réponse exacte**
- c) $\lim_{x \rightarrow -6} f(x) = 7$ **1. c) est une réponse fausse.**
- d) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty$ **1. d) est une réponse fausse.**

2. c) est la réponse exacte

En effet :

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$, $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty$

Donc la droite d'équation $y = 5$ est asymptote horizontale à (C) au voisinage de $+\infty$
et la droite d'équation $x = -3$ est asymptote verticale à (C).

3. d) est la réponse exacte

f est continue sur $] -6 ; -3[\cup] -3 ; +\infty [$.

l'image de l'intervalle $] -6, -4]$ par f est $] 7, 8]$ et 4 n'appartient pas à $] 7, 8]$ donc l'équation $f(x) = 4$ de solution dans $] -6 ; -4]$.

l'image de l'intervalle $[-4, -3[$ par f est $] -\infty, 8]$ et 4 appartient pas à $] -\infty, 8]$. D'autre part, f est croissante sur $[-4, -3[$ donc admet exactement une seule solution dans $[-4, -3[$.

l'image de l'intervalle $] -3, 2]$ par f est $] -\infty, 3]$ et 4 appartient pas à $] -\infty, 3]$; d'autre part, f est strictment décroissante sur $] -3, 2]$ donc admet exactement une seule solution dans $] -3, 2]$.

l'image de l'intervalle $[2, +\infty [$ par f est $[3, +\infty [$ et 4 appartient pas à $[2, +\infty [$; d'autre part, f est strictment décroissante sur $[2, +\infty [$ donc admet exactement une seule solution dans $[2, +\infty [$.

Il en résulte que l'équation $f(x) = 4$ admet exactement trois solution dans $] -6 ; -3[\cup] -3 ; +\infty [$.

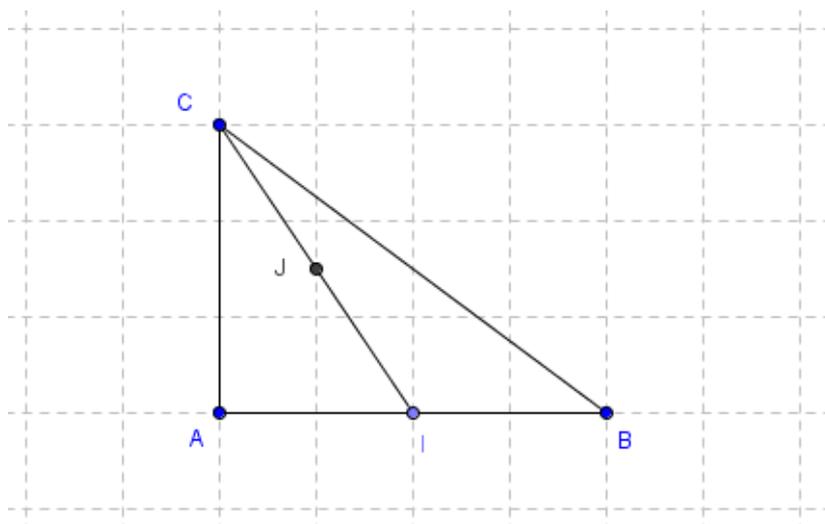
Exercice 2 :

$$\begin{aligned}
 1. \left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EC} \right) &\equiv \pi + \left(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC} \right) [2\pi] \\
 &\equiv -\pi + \frac{\pi}{15} [2\pi] \\
 &\equiv -\frac{14\pi}{15} [2\pi]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \left(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{AB} \right) &\equiv - \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EB} \right) [2\pi] \\
 &\equiv - \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BE} \right) [2\pi] \\
 &\equiv -\frac{2\pi}{5} [2\pi]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \left(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EC} \right) &\equiv \left(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{AB} \right) + \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE} \right) + \left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC} \right) [2\pi] \\
 &\equiv -\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{6} - \frac{14\pi}{15} [2\pi] \\
 &\equiv -\frac{45\pi}{30} [2\pi] \\
 &\equiv -\frac{3\pi}{2} [2\pi] \\
 &\equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]
 \end{aligned}$$

On en déduit que le triangle BEC est rectangle en E et de sens indirect.

Exercice 3 :

Partie A

1. Pour qu'un point M du plan appartienne à l'ensemble (Γ) , il faut et il suffit que :

$$MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = 36.$$

Comme $BA^2 + BB^2 + 2BC^2 = AB^2 + 2AC^2 = 16 + 18 = 36$ alors $B \in (\Gamma)$.

$$2. \quad M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = 36 \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} + 2MC^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow 2(MI^2 + MC^2) + \frac{AB^2}{2} = 36 \Leftrightarrow 2\left(2MJ^2 + \frac{IC^2}{2}\right) + \frac{AB^2}{2} = 36$$

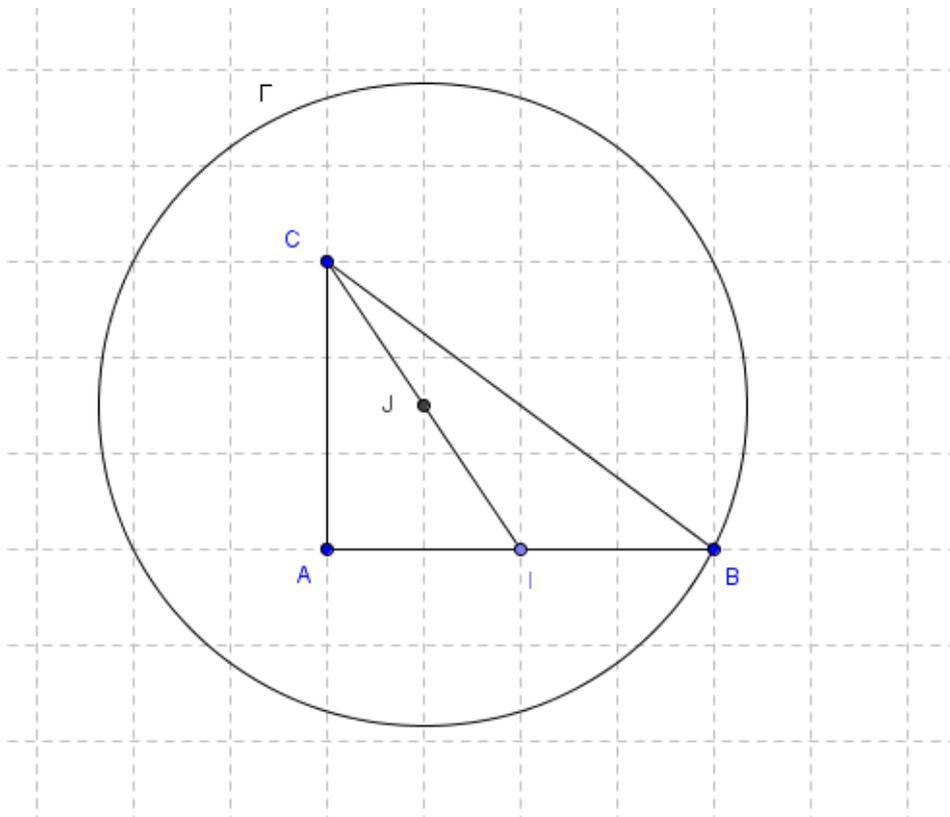
$$\Leftrightarrow 4MJ^2 + IC^2 + \frac{AB^2}{2} = 36$$

$$3. \quad M \in (\Gamma) \Leftrightarrow 4MJ^2 + IC^2 + \frac{AB^2}{2} = 36 \Leftrightarrow 4JM^2 + (AI^2 + AC^2) + 8 = 36$$

$$\Leftrightarrow 4JM^2 + 21 = 36 \Leftrightarrow JM^2 = \frac{15}{4} \Leftrightarrow JM = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Par suite, l'ensemble (Γ) est le cercle de centre J et de rayon $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

Pour représenter (Γ) , il suffit de tracer le cercle de centre J et passant par B.



Partie B.

1. a) Rappelons que : $M(x, y) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = x \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + y \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$.

Comme $\overrightarrow{AB} = 4 \cdot \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} = 4 \cdot \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + 0 \cdot \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$ alors $B(4, 0)$.

D'autre part $\overrightarrow{AC} = 3 \cdot \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} = 0 \cdot \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + 3 \cdot \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$ donc $C(0, 3)$.

b) $M(x, y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = 36$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + (x-4)^2 + y^2 + 2[x^2 + (y-3)^2] = 36$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 4y^2 - 12y + 34 = 36$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 3y - \frac{1}{2} = 0$$

Donc une équation de (Γ) dans le repère $\left(A, \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}, \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}\right)$ est $x^2 - 2x + y^2 - 3y - \frac{1}{2} = 0$

2. $x^2 - 2x + y^2 - 3y - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - \frac{1}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{15}{4}$$

Il en résulte que (Γ) est le cercle de centre le point $\Omega\left(1, \frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

Il reste à vérifier que $\Omega = J$.

On sait que $C(0, 3)$ et I milieu de $[AB]$ donc $I(2, 0)$. On en déduit que J milieu de $[CI]$ a pour

abscisse $x_j = \frac{2+0}{2} = 1$ et pour ordonnée $y_j = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$.

Ainsi $\Omega = J$.