Exercice 1 – (3 points)

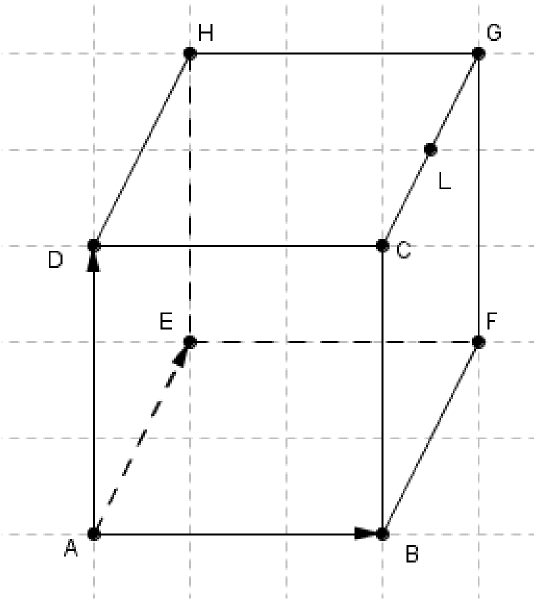
A chacune des questions suivantes, trois affirmations sont données. Une seule affirmation est exacte. Donner, sans justification, le numéro de la question et la lettre qui lui correspond.

Le repère (A, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}$) formé sur le cube ABCDEFGH est orthonormé direct. On désigne par L le milieu du segment [CG].

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est égal à :
   a) $\overrightarrow{AE}$; b) $\overrightarrow{EA}$; c) AE .

2. L'aire du triangle ABL est :
   a) $\frac{1}{2}$; b) 1 ; c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

3. La distance du point G à la droite (DF) est :
   a) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{6}$; c) 1



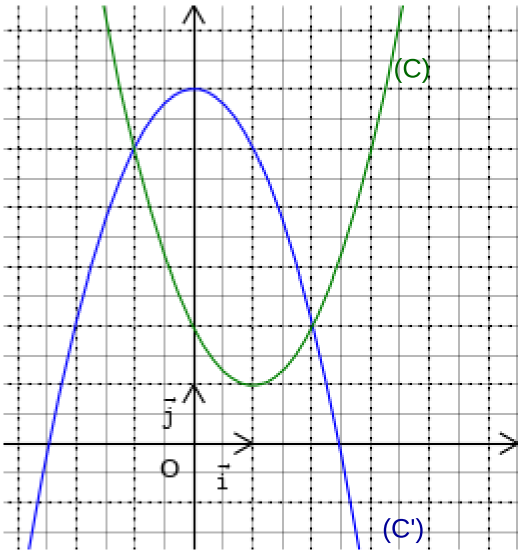
Exercice 2 - (4 points)

Ci contre sont tracées les courbes représentatives (C) et (C') respectives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 2$ et $g(x) = -x^2 + 6$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. Calculer l'aire $\mathcal{A}$, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (C') et les droites d'équations respectives x = –1 et x = 2.

2. On pose pour tout x réel, $h(x) = g(x) - f(x)$, en déduire la valeur moyenne de h sur l'intervalle $[-1, 2]$.

3. Vérifier que pour tout x réel, $f(1-x) + g(x) = 7$.
En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^3 f(1-x)\,dx$.



Exercice 3 (6 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on donne :

- les points A (1 ; –2 ; 1) , B (2 ; –1 ; 3) , C(1 ;1 ;4) et H(0 ; 0 ; 2) .
- la droite (Δ) définie par : $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t + 2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer un vecteur normal au plan (P) déterminé par les points A , B et C.
2. Montrer que la droite (Δ) est perpendiculaire au plan (P) en H.
3. Démontrer que H est équidistant de A , B et C.
4. Soit M un point variable de (Δ) et E(2 ; 2 ; 0) un point fixe de (Δ).
   a) Calculer le volume du tétraèdre EABC.
   b) Pour quelles valeurs de t , le volume du tétraèdre MABC est-il égal au double de celui du tétraèdre EABC ?

Exercice 4 (7 points)

1. Soit u la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par $u(x) = \sqrt{1+\sin x}$.

Montrer que u est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer u'(x) pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$,

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = \left[0,\sqrt{2}\right[$ par $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2-x^2}}$.

Soit F la primitive de f sur I qui s'annule en 0.

Soit G la fonction définie sur l'intervalle $J=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par $G(x) = F\left(\sqrt{1+\sin x}\right)$.

a) Montrer que G est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et que pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, G'(x) = 1.

b) Calculer $G\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. En déduire que pour tout x de J, $G(x) = x+\frac{\pi}{2}$.

2. Déduire la valeur exacte de F(1).

Corrigé

Exercice 1 :

1. a) ; 2. b) ; 3. a)

Exercice 2 :

1. L'aire $\mathcal{A}$ est donnée par : $A = \int_{-1}^{2} |f(x) - g(x)| dx$.

Or la courbe (C') de g est située au dessus de la courbe (C) de f sur l'intervalle [-1, 2], donc

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} (g(x) - f(x)) dx = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x\right]_{-1}^{2} = \frac{20}{3} + \frac{7}{3} = 9.$$

2. La valeur moyenne de h sur [-1, 2] est $\bar{h} = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} (g(x) - f(x)) dx = \frac{9}{3} = 3$.

3. Pour tout x réel,

$$\begin{aligned} f(1-x) + g(x) &= (1-x)^2 - 2(1-x) + 2 + x^2 + 6 \\ &= 1 - 2x + x^2 - 2 + 2x + 8 + x^2 \\ &= 7 \end{aligned}$$

$$\int_0^3 f(1-x) dx = \int_0^3 (7 - g(x)) dx = \int_0^3 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^3 = \frac{15}{2}.$$

Exercice 3 :

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-3\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (P).

2. Soit $(\Delta) : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t + 2 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

Un vecteur directeur de (Δ) est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ or $\vec{u}$ est un vecteur normal à (P), donc $\Delta \perp P$.

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t + 2 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t + 2 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 2 \\ t = 0 \end{cases} \text{ donc } \{H\} = \Delta \cap P$$

Ainsi, (Δ) est la perpendiculaire au plan (P) en H.

Corrigé

3. $HA=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$, $HB=\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{6}$ et $HC=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$

Ainsi , H est un point équidistant des points A, B et C.

4. a) Le volume du tétraèdre EABC est $\mathcal{V}=\dfrac{\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}\right)\right|}{6}$.

Or $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}\right)=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&3&4\\2&3&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&4\\3&-1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&1\\3&-1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}0&1\\3&4\end{vmatrix}=-15+3-6=-18$

Donc $\mathcal{V}=\dfrac{18}{6}=3$.

b) Le volume du tétraèdre ABCM est $\mathcal{V}'=\dfrac{\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AM}\right)\right|}{6}$.

Or

$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AM}\right)=\begin{vmatrix}1&0&t-1\\1&3&t+2\\2&3&-t+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&t+2\\3&-t+1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&t-1\\3&-t+1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}0&t-1\\3&t+2\end{vmatrix}=-6t-3+3t-3-6t+6=-9t$

Ainsi : $\mathcal{V}'=\dfrac{|-9t|}{6}=\dfrac{3}{2}|t|$

Pour que $\mathcal{V}'=2\mathcal{V}$, il faut et il suffit que $\dfrac{3}{2}|t|=6$ d'où $|t|=4 \Leftrightarrow$ t = -4 ou t = 4.

Remarque :

V(MABC) = $\dfrac{1}{3}$MH × aire(ABC) et V(EABC) = $\dfrac{1}{3}$EH × aire(ABC)

V(MABC) = 2V(EABC) $\Leftrightarrow$ MH = 2 EH $\Leftrightarrow$ $MH^2 = 4EH^2$ $\Leftrightarrow$ $3t^2 = 48$ $\Leftrightarrow t^2 = 16$

$\Leftrightarrow$ t = – 4 ou t = 4.

Corrigé

Exercice 4 :

1. La fonction $x \mapsto 1+\sin x$ est dérivable et strictement positive sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ donc u est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $u'(x)=\frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}$.

2. a) On a :

- ✓ u est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$
- ✓ $-\frac{\pi}{2}\leq x<\frac{\pi}{2}$ donc $-1\leq \sin x<1 \Leftrightarrow 0\leq 1+\sin x<2$ d'où $u(x)\in\left[0,\sqrt{2}\right[=I$
- ✓ F est une primitive sur I= $\left[0,\sqrt{2}\right[$ de f donc F est dérivable sur I

Il en résulte que G est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$,

$$G'(x)=u'(x).F'(u(x))=\frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}.f\left(\sqrt{1+\sin x}\right)=\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{\cos x}{|\cos x|}=1 \text{ car } \cos x>0.$$

b) $G\left(-\frac{\pi}{2}\right)=F\left(\sqrt{1-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}\right)=F(0)=0$.

Il existe un réel c tel que Pour tout x de J, G(x) = x + c.

Or $G\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}+c=0\Leftrightarrow c=\frac{\pi}{2}$ donc pour tout x de J, $G(x)=x+\frac{\pi}{2}$.

3. $F(1)=F\left(\sqrt{1+\sin 0}\right)=G(0)=\frac{\pi}{2}$.