Lycée IBN KHALDOUN RADES Mr. ABIDI Farid	**DEVOIR DE SYNTHESE N°2** MATHEMATIQUES	Classe : **4 SE** 3 Durée : 3h Mars - 2009

Exercice 1 (3 points)

Soit la fonction f dont la représentation graphique dans un repère orthonormé du plan est la courbe (C) est donnée ci-dessous.
Soit F la fonction définie sur [0, 3] par F(x) = $\int_0^x f(t)dt$.

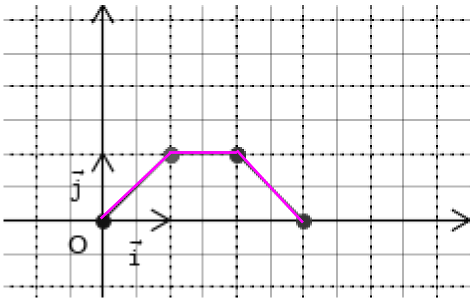
Répondre par Vrai ou Faux à chacune des affirmations suivantes :

a) F n'est pas dérivable en 1 et en 2.

b) F est décroissante sur [0, 3].

c) Si $x \in [0,1]$ alors $F(x) = \frac{1}{2}x^2$.

d) Si $x \in [1,2]$ alors $F(x) = x - \frac{1}{2}$



Exercice 2 (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne le plan (P) d'équation 2x + y - 2z - 2 = 0 et les points A (-1 ; 1 ; 3) , B (1 ; 2 ; 1) et C(0 ; 4 ; 1).

1) Montrer que la droite (AB) est perpendiculaire en B au plan (P).

2) Soit (Γ) le cercle dans le plan (P) de centre B et de rayon $\sqrt{5}$. On désigne par (S) la sphère de centre A coupant le plan (P) suivant le cercle (Γ).
a) Montrer que le point C appartient à (Γ).
b) Déterminer le rayon de la sphère (S).

3) On considère le point D(1, 0, 0).
a) D appartient-il à la sphère (S) ? justifier.
b) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

Exercice 3 (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne le plan (P) d'équation x + y + z – 4 = 0 et les points A (3 ;1 ; 0) , B(1; 2 ;1) , C(1; 1;2) et E(2; 0 ;-1).

1) a- Vérifier que les points A, B et C appartiennent au plan (P).
b- Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite (Δ) perpendiculaire en A au plan (P) et vérifier que E est un point de (Δ).

2) On désigne par (Q) le plan passant par A et perpendiculaire à (BE).
Ecrire une équation de (Q).

3) Les plans (P) et (Q) se coupent suivant une droite (D).
a- Démontrer que les droites (D) et (BC) sont parallèles.

b- M est un point variable de (BC), démontrer que la distance de M au plan (Q) reste constante.

Exercice 4 (4 points)

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx \qquad \text{et} \qquad \text{pour} \quad n \geq 1 \ , \quad U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}dx \quad .$$

1) Calculer U_0 et U_1.

2) Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $U_{n+1} + U_n = \dfrac{1}{n+1}$ et en déduire la valeur de U_2.

3) a- Montrer que , pour $0 \leq x \leq 1$, on a $0 \leq \dfrac{x^n}{x+1} \leq x^n$

et en déduire que $0 \leq U_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

b- Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice 5 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $I =]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + \ln x$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer f '(x) et déterminer le sens de variations de f sur $]0;+\infty[$.

2) a- Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et déduire une asymptote à (C).

b- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter géométriquement le résulat obtenu.

c- Dresser le tableau de variations de f.

d- Déduire que l'équation $x^2 + \ln x = 0$, admet une solution unique α et que $0,6 < \alpha < 0,7$.

Etudier le signe de f(x) suivant les valeurs de x.

3) a- Démontrer que (C) admet un point d'inflexion dont on déterminera l'abscisse.
b- Tracer (C).

4) a- Démontrer que f admet sur I, une fonction réciproque f^{-1} dont on déterminera l'ensemble de définition .

b- Soit (C') la courbe représentative de f^{-1}. Prouver que le point A(1;1) est commun à (C) et (C') et tracer (C') dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

c- Ecrire une équation de la tangente en A à (C').

d- Soit S(α) l'aire, en ua, du domaine limité par (C), (C'), l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

Calculer S(α).

Corrigé

Exercice 1 :

L'affirmation (a) est **Fausse.**
En effet :
F est une primitive de f sur I donc F est dérivable sur I d'où F est dérivable en 1 et en 2.

L'affirmation (b) est **Fausse**.
En effet :
f est positive sur I donc F est croissante sur I.

L'affirmation (c) est **Vraie**.
En effet :

Pour tout x de [0, 1], $F(x)=\int_0^x t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^x=\frac{1}{2}x^2$.

L'affirmation (d) est **Vraie.**
En effet :

Pour tout x de [1, 2], $F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt+\int_1^x f(t)dt=\frac{1}{2}+\int_1^x dt=x-\frac{1}{2}$

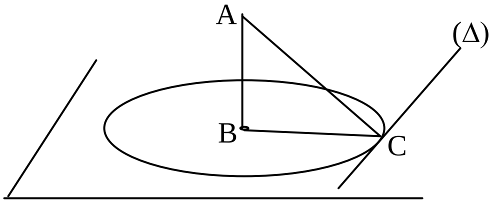
Exercice 2

1. On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{N_P}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (P).

Donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{N_P}$.
Or $2x_B + y_B - 2z_B - 2 = 0$ donc B est un point de (P) .
Ainsi, la droite (AB) est la perpendiculaire au plan (P) en B.

2. a) On a :
   - $2x_C + y_C - 2z_C - 2 = 0$ donc C appartient au plan.
   - $BC=\sqrt{(-1)^2+2^2+0^2}=\sqrt{5}$

   Donc C est un point de (Γ).



b) Le rayon de la sphère (S) est $AC=\sqrt{(0+1)^2+(4-1)^2+(1-3)^2}=\sqrt{14}$

Ou encore AC = $\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{9+5}=\sqrt{14}$.

3. a) En calculant la distance AD, on obtient : $AD=\sqrt{2^2+1^2+3^2}=\sqrt{14}$ donc D est un point de (S).

b) Le volume du tétraèdre ABCD est : V = $\dfrac{\left|\det\left(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}\right)\right|}{6}=\dfrac{1}{6}\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & -1\\ -2 & -2 & -3\end{vmatrix}=\dfrac{9}{6}=\dfrac{3}{2}$

Exercice 3

1. a) $x_A+y_A+z_A-4=3+1+0-4=0$ donc $A\in(P)$.
$x_B+y_B+z_B-4=1+2+1-4=0$ donc $B\in(P)$.
$x_C+y_C+z_C-4=1+1+2-4=0$ donc $C\in(P)$.

b) $\vec{N_P}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (Δ) donc (Δ) : $\begin{cases}x=3+\alpha\\ y=1+\alpha\\ z=\alpha\end{cases}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

Pour y = 0 on a $\alpha=-1$, donc x = 2 et z = – 1 d'où $E\in(\Delta)$.

2. $\vec{BE}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ est normal à (Q) donc (Q) : x – 2y – 2z + d = 0 où d est un réel.

$A\in(Q)$ $\Leftrightarrow$ d = – 1 donc (Q) : x – 2y – 2z – 1 = 0.

3. a) (D) : $\begin{cases}x+y+z-4=0\\ x-2y-2z-1=0\end{cases}$

$\begin{cases}x+y+z-4=0 & L_1\\ x-2y-2z-1=0 & L_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3y+3z-3=0 & L_1-L_2\\ 3x-9=0 & 2L_1+L_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=1-z\end{cases}$

Il en résulte : (D) : $\begin{cases}x=3\\ y=1-t\\ z=\quad t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ donc $\vec{V_D}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D) . Or $\vec{BC}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ donc $\vec{BC}=\vec{V_D}$ d'où (BC) // (D).

▶**OU :**(BC) est perpendiculaire à (AB) et orthogonale à (EA) donc la droite (BC) est perpendiculaire au plan (EAB) et en particulier à (EB) , or (EB) est perpendiculaire à (Q) donc (BC) est parallèle à (Q) , le plan (P) contenant (BC) coupe (Q) suivant (D) parallèle à (BC).

b) $(BC):\begin{cases} x=1 \\ y=-m+2 \\ z=m+1 \end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$ donc pour tout réel m, M(1 ; – m + 2 ; m +1) est un point de la droite (BC).

Par suite : $d(M;(Q))=\dfrac{|1+2m-4-2m-2-1|}{\sqrt{1+4+4}}=2$.

▶**OU** : (BC) // (D) et (D)$\subset$(Q) alors (BC) // (Q) et $M\in$(BC) donc $d(M;(Q))$ est constante.

Exercice 4

1. $U_o=\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x+1}=\left[\ln(x+1)\right]_0^1=\ln 2$

$U_1=\displaystyle\int_0^1\frac{x}{x+1}dx=\int_0^1\frac{x+1-1}{x+1}dx=\int_0^1(1-\frac{1}{x+1})dx=\left[x-\ln(x+1)\right]_0^1=1-\ln 2$

2. $U_{n+1}+U_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^{n+1}+x^n}{x+1}\,dx=\int_0^1\frac{x^n(x+1)}{x+1}\,dx=\int_0^1 x^n dx=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$.

Pour n = 1 ; $U_2+U_1=\dfrac{1}{2}$; $U_2=\ln 2-\dfrac{1}{2}$.

3. a) $0\le x\le 1 \Leftrightarrow 1\le x+1\le 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\le\dfrac{1}{x+1}\le 1 \Leftrightarrow 0\le\dfrac{1}{x+1}\le 1 \Leftrightarrow 0\le\dfrac{x^n}{x+1}\le x^n$

donc $0\le\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{x+1}dx\le\int_0^1 x^n dx$ d'où $0\le U_n\le\dfrac{1}{n+1}$.

b) Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}U_n=0$.

Exercice 5

1. Pour tout x de I , $f'(x)=2x+\dfrac{1}{x}$ or $x>0$ donc $f'(x)>0$ d'où f est strictement croissante sur I.

2. a) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty$ par suite la droite des ordonnées est asymptote de (C).

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$\dfrac{f(x)}{x}=x+\dfrac{\ln x}{x}$ et comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

c)

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

d) f est continue et strictement croissante sur I et $f\left(\left]0,+\infty\right[\right)=\mathbb{R}$, donc l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α.

En plus : f(0,6)=-0,15 et f(0,7)=0,133 donc $0,6<\alpha<0,7$.

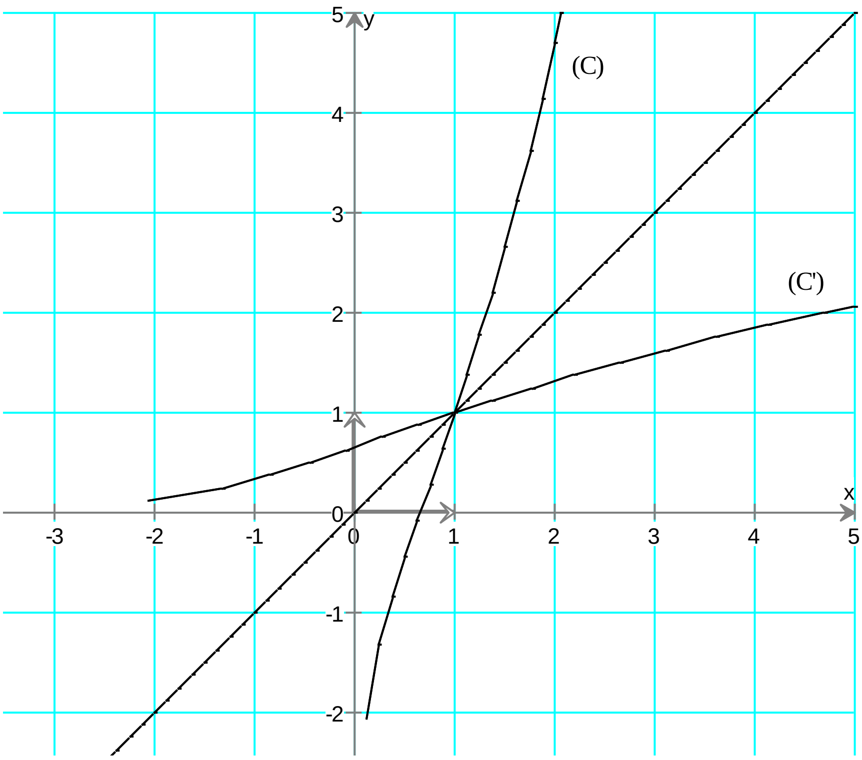
D'autre part : si $0<x<\alpha$ alors $f(x)<0$ et si $x>\alpha$ alors $f(x)>0$.

3. a) On a, pour tout x de I, $f''(x)=2-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{2x^2-1}{x^2}$;

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2=1$ et $x>0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

En plus $f''(x)<0$ pour $0<x<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $f''(x)>0$ pour $x>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ donc (C) admet un point d'inflexion J d'abscisse $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

b)



4.a) f est continue et strictement croissante sur I, donc elle admet une fonction réciproque f^{-1}
qui est définie sur $f(I) = \left]-\infty;+\infty\right[= \mathbb{R}$.

b) f(1) = 1 donc A(1;1) est un point commun à (C) et (C') car $x_A = y_A$ et $A \in (C)$

et on trace (C') par symétrie de (C) par rapport à la droite $(\Delta): y = x$.

c) La tangente en A à (C) est d'équation :

$y = f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow y = 3(x-1)+1 \Leftrightarrow y = 3x-2$ donc la tangente en A à (C') a

pour équation: $x = 3y-2$ d'où $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

d) En tenant compte de la symétrie par rapport à (Δ) on peut écrire

$S(\alpha) = A(\alpha) = 2\left[\int_0^1 x\,dx - \int_\alpha^1 f(x)\,dx\right]$ or $\int_\alpha^1 \ln x\,dx = \left[x\ln x - x\right]_\alpha^1 = -1 - \alpha\ln\alpha + \alpha$

D'où $S(\alpha) = A(\alpha) = 2\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_\alpha^1 + 1 + \alpha\ln\alpha - \alpha\right)$

$$= 2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{\alpha^3}{3} + 1 + \alpha\ln\alpha - \alpha\right]$$

$$= \frac{7}{3} + \frac{2\alpha^3}{3} + 2\alpha\ln\alpha - 2\alpha$$