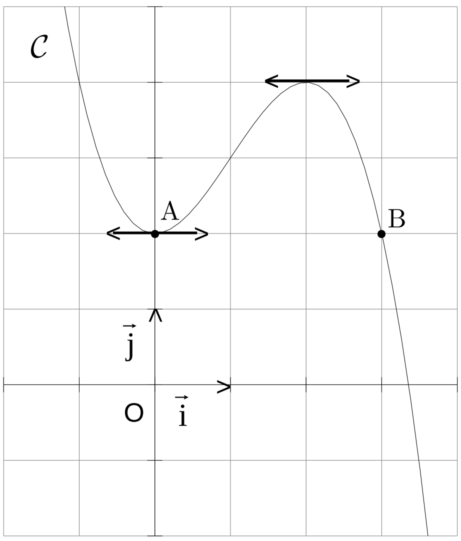
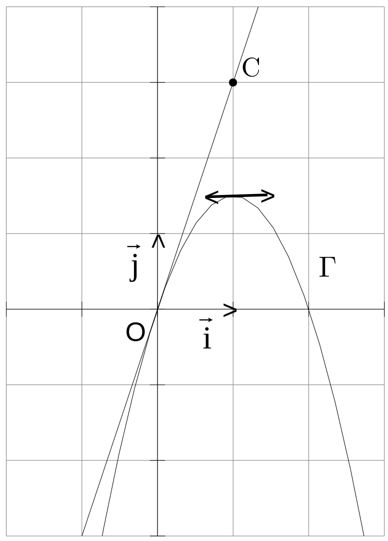
LYCEE IBN KHALDOUN RADES Mr ABIDI Farid	DEVOIR DE SYNTHESE N°1 MATHEMATIQUES	Classe : 4 SE 3 Durée : 2h Année scolaire 2008-09

Exercice 1: (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, numérotées de 1 à 8, dire si elle est vraie ou fausse sans justification . Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note f' et f'' les dérivées première et seconde de f.

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f .	La courbe Γ ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f'.
	
	La droite (OC) est tangente à Γ en O

1. $f'(2) = 0$.
2. Une équation de la tangente en A à $\mathcal{C}$ est $y = 2$.
3. $f(1)$ et $f'(1)$ sont tous deux positifs.
4. f' est négative sur $[-1\,;3]$.
5. $(f \circ f')(2) = 0$.
6. La pente de la tangente en B à $\mathcal{C}$ est -3.
7. $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion d'abscisse 1.
8. $(f \circ f')'(1) = 0$.

Exercice 2: (6 points)

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}\left(2 - u_n{}^2\right)$.

1. Soit f la fonction définie sur $[1,2]$ par f(x) = $x + \frac{1}{4}\left(2 - x^2\right)$.
   a) Montrer que pour tout x de $[1,2]$, $|f'(x)| \le \frac{1}{2}$.
   b) Montrer que pour tout x de $[1,2]$, $\left|f(x) - \sqrt{2}\right| \le \frac{1}{2}\left|x - \sqrt{2}\right|$.
2. a) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $1 \le u_n \le 2$.

   b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \le \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right|$.

   c) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Conclure.

Exercice 3 : (4 points)

Etant un réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$; on considère l'équation (E) : $z^2 - 2e^{i\theta}\cos\theta\, z + e^{2i\theta} = 0$.

1. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-e^{2i\theta}\sin^2\theta$.

2. Déterminer les solutions z_1 et z_2 de l'équation (E). On prendra z_1 la solution réelle.

Exercice 4 : (6 points)

1. Vérifier que $z_0 = 1 + i$ est une racine cubique de $-2 + 2i$.
2. Montrer que : z est une racine cubique de $-2 + 2i$ équivaut à $\left(\frac{z}{1+i}\right)^3 = 1$.
3. En déduire sous forme algébrique les deux autres racines cubiques z_1 et z_2 de $-2 + 2i$.
4. Placer, dans le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, les images M_0, M_1 et M_2 des racines cubiques de $-2 + 2i$.

Exercice 1:

1. Vraie ; 2. Vraie ; 3.Vraie ; 4. Fausse ; 5. Fausse ; 6. Fausse ; 7. Vraie ; 8. Vraie.

Exercice 2 :

1. a) f est dérivable sur [1, 2] et pour tout x de [1, 2], $f'(x)=1+\frac{1}{4}(-2x)=1-\frac{1}{2}x$.

   $1\le x\le 2 \Leftrightarrow -1\le -\frac{1}{2}x\le -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 0\le 1-\frac{1}{2}x\le \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0\le f'(x)\le \frac{1}{2}$.

   Par suite pour tout x de [0, 1] , $|f'(x)|\le \frac{1}{2}$.

   b) Appliquons le théorème des inégalités des accroissements finis à la fonction f sur [1, 2] :

   remarquons d'abord que $\sqrt{2}\in[1,2]$ et que $f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}-\frac{1}{4}\left(2-\left(\sqrt{2}\right)^2\right)=\sqrt{2}$,

   d'autre part, f est dérivable sur [1, 2] et pour tout x de [1, 2] , $|f'(x)|\le \frac{1}{2}$ donc pour tout x de [1, 2] , $\left|f(x)-f\left(\sqrt{2}\right)\right|\le \frac{1}{2}\left|x-\sqrt{2}\right| \Leftrightarrow \left|f(x)-\sqrt{2}\right|\le \frac{1}{2}\left|x-\sqrt{2}\right|$.

2. a) On a : $u_0=0$ donc $1\le u_0\le 2$.

   On suppose que, $1\le u_n\le 2$ pour un certain rang n de $\mathbb{N}$, et on montre que $1\le u_{n+1}\le 2$.

x	1	2
$1-\frac{1}{2}x$	+	0
f'(x)	+	0

   Il en résulte que la fonction f est strictement croissante sur [1, 2].

   D'où : $1\le u_n\le 2 \Rightarrow f(1)\le f(u_n)\le f(2) \Leftrightarrow \frac{5}{4}\le u_{n+1}\le \frac{3}{2}$. Ainsi , $1\le u_{n+1}\le 2$.

   On conclue que : pour tout n de $\mathbb{N}$, $1\le u_n\le 2$.

   b) On a , pour tout n de $\mathbb{N}$, $1\le u_n\le 2$ donc $\left|f(u_n)-\sqrt{2}\right|\le \frac{1}{2}\left|u_n-\sqrt{2}\right|$

   d'où pour tout n de $\mathbb{N}$, $\left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right|\le \frac{1}{2}\left|u_n-\sqrt{2}\right|$.

   c) $\left|u_1-\sqrt{2}\right|\le \frac{1}{2}\left|u_0-\sqrt{2}\right|$

   $\left|u_2-\sqrt{2}\right|\le \frac{1}{2}\left|u_1-\sqrt{2}\right|$

   $\vdots$

   $\left|u_n-\sqrt{2}\right|\le \frac{1}{2}\left|u_{n-1}-\sqrt{2}\right|$

D'où par produit membre à membre de ces n inégalités , on obtient :

$\left|u_n-\sqrt{2}\right|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n\left|u_0-\sqrt{2}\right|$.

Or $\left|u_0-\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}-1\le 1$ donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $\left|u_n-\sqrt{2}\right|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\sqrt{2}$.

Exercice 3 :

1. $-e^{2i\theta}\sin^2\theta=-\left(e^{i\theta}\sin\theta\right)^2=\left(ie^{i\theta}\sin\theta\right)^2$ ainsi les racines carrées de $-e^{2i\theta}\sin^2\theta$ sont :

   $ie^{i\theta}\sin\theta$ et $-ie^{i\theta}\sin\theta$.
2. Le discriminant réduit de l'équation (E) est

   $\Delta'=\left(-e^{i\theta}\cos\theta\right)^2-e^{2i\theta}=e^{2i\theta}\cos^2\theta-e^{2i\theta}=e^{2i\theta}\left(\cos^2\theta-1\right)=-e^{2i\theta}\sin^2\theta$

Une racine carrée de Δ' est donc $ie^{i\theta}\sin\theta$.
Il en résulte que les solutions de l'équation (E) sont :

$z_1=e^{i\theta}\cos\theta-ie^{i\theta}\sin\theta=e^{i\theta}\left(\cos\theta-i\sin\theta\right)=e^{i\theta}.e^{-i\theta}=1$

et $z_2=e^{i\theta}\cos\theta+ie^{i\theta}\sin\theta=e^{i\theta}\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)=e^{2i\theta}$.

Exercice 4:

1. $z_0^3=(1+i)^3=(1+i)^2(1+i)=2i(1+i)=-2+2i$ donc $z_0=1+i$ est une racine cubique de -2 + 2i.
2. z est une racine cubique de $-2+2i\Leftrightarrow z^3=-2+2i\Leftrightarrow z^3=(1+i)^3\Leftrightarrow\frac{z^3}{(1+i)^3}=1\Leftrightarrow\left(\frac{z}{1+i}\right)^3=1$
3. $z^3=-2+2i\Leftrightarrow\left(\frac{z}{1+i}\right)^3=1\Leftrightarrow\frac{z}{1+i}=1$ ou $\frac{z}{1+i}=j$ ou $\frac{z}{1+i}=\bar{j}$

$$\Leftrightarrow z=1+i \text{ ou } z=(1+i)j \text{ ou } z=(1+i)\bar{j}$$

$$\Leftrightarrow z=1+i \text{ ou } z=(1+i)\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z=(1+i)\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z=1+i \text{ ou } z=\frac{-1-\sqrt{3}+i\left(-1+\sqrt{3}\right)}{2} \text{ ou } z=\frac{-1+\sqrt{3}-\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}$$

D'où les racines cubiques autre que $z_0=1+i$ de -2 + 2i sont :

$z_2=\frac{-1-\sqrt{3}+i\left(-1+\sqrt{3}\right)}{2}$ et $z_3=\frac{-1+\sqrt{3}-\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}$

Ou encore : $z_2 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{\left(-1+\sqrt{3}\right)}{2}$ et $z_3 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} - i\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}$

4. Le triangle $M_0M_1M_2$ est équilatéral et inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $|z_0| = |1+i| = \sqrt{2}$