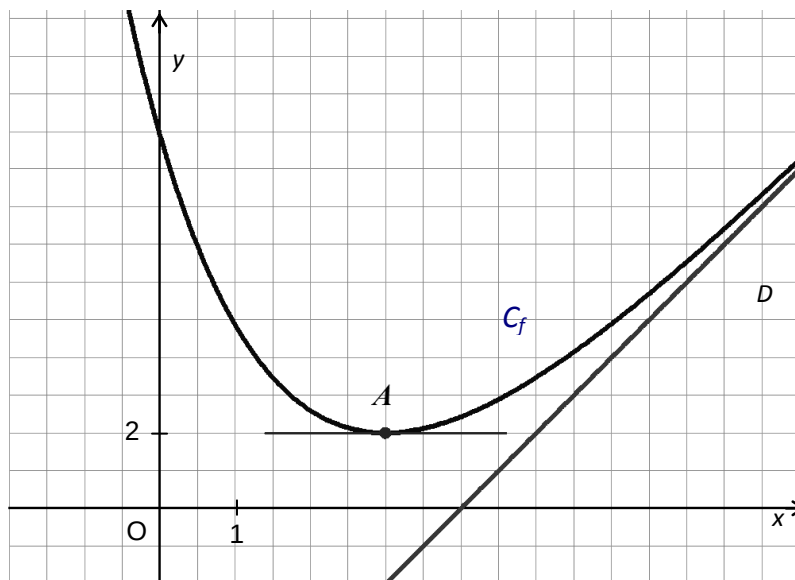


Exercice 1 (4 points)

Sur la figure ci-dessous est tracée la courbe représentative notée C_f d'une fonction f continue sur $\mathbb{R}$. On sait que la droite D d'équation $y = 2x - 8$ est asymptote à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$, que la courbe C_f admet branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $-\infty$ et qu'elle passe par le point $A(3;2)$;



Répondre par **Vrai** ou **Faux** à chaque proposition ci-dessous:

- 1) a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$; d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x) - 2x} = \frac{1}{8}$
e) $f(1) = 2,5$; f) $f(\mathbb{R}) = [2, +\infty[$.
- 2) Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]2, +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$.
a) $h \circ f(3) = 1$; b) $\lim_{x \rightarrow 3} h \circ f(x) = 0$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} h \circ f(x) = +\infty$;
d) l'équation $h(x) = 1$ admet une unique solution réelle.

Exercice 2 (6 points)

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par : $f_n(x) = x^3 - 2nx + 1$.

1. Montrer que la fonction f_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$.

2. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution a_n dans l'intervalle $[0, 1]$.
3. Donner un encadrement de a_2 d'amplitude 10^{-1} .
4. a) Calculer $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$ puis montrer que, pour tout n , $f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$.
- b) En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $a_n \leq \frac{1}{n}$.
- c) Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 2}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3 (4 points)

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 5 - i\sqrt{3}$ et $z_B = 4 + 2i\sqrt{3}$. On note Q le milieu du segment [OB].

1. Déterminer l'affixe z_Q du point Q et l'affixe z_K du point K tel que ABQK soit un parallélogramme.
2. a) Démontrer que $\frac{z_K - z_A}{z_K}$ est imaginaire pur. Que peut-on en déduire pour le triangle OKA ?
- b) Préciser la nature du quadrilatère OQAK.
3. Soit C le point d'affixe $z_C = \frac{2}{3}z_A$. Calculer $\frac{z_K - z_B}{z_K - z_C}$. Que peut-on en déduire pour les points B, C et K ?

Exercice 4 (6 points)

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 1cm), placer les points A , B et C d'affixes respectives $a = 8$, $b = -4 + 4i$ et $c = -4i$

1. a) Ecrire chacun des nombres complexes a, b et c sous forme exponentielle.
b) Démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.
2. On désigne par A' , B' et C' les points d'affixes respectives a' ; b' et c' définie par :
 $a' = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$, $b' = 4\sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{12}}$ et $c' = -4ie^{i\frac{\pi}{3}}$
 - a) Etablir que $b' = -2(1 + \sqrt{3}) + 2(1 - \sqrt{3})i$.
 - b) Ecrire a' et c' sous forme algébrique.
3. a) Déterminer les affixes p, q et r des points P, Q et R milieux des segments [A'B] , [B'C] et [C'A].
b) Démontrer que $r - p = e^{i\frac{\pi}{3}}(q - p)$. En déduire la nature du triangle PQR.

Solution

Exercice 1 :

1. a) Faux ; b) Vrai ; c) faux ; d) Faux ; e) Faux ; f) Vrai
2. a) Faux ; b) Faux ; c) Faux ; d) Vrai

Exercice 2

1. f_n est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout x de $[0, 1]$, $f'_n(x) = 3x^2 - 2n = 3\left(x^2 - \frac{2n}{3}\right)$.

Comme $n \geq 2$, on a $2n \geq 4$ donc $\frac{2n}{3} \geq \frac{4}{3} > 1$. Ainsi, pour tout x de $[0, 1]$,

$x^2 \leq 1 < \frac{2n}{3}$ ou encore $x^2 - \frac{2n}{3} < 0$. Il en résulte que, pour tout x de $[0, 1]$, $f'_n(x) < 0$. Par suite, f_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$.

2. On a : f_n est continue et strictement décroissante sur $[0, 1]$.

D'autre part : $f_n(0) = 1$ et $f_n(1) = 2 - 2n = 2(1 - n) < 0$.

Il en résulte que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique a_n dans l'intervalle $[0, 1]$.

3. On sait que $f_2(a_2) = 0$ et pour tout x de $[0, 1]$, $f_2(x) = x^3 - 4x + 1$.

On a : $f_2(0) = 1$ et $f_2(1) = -2$ donc $0 < a_2 < 1$

$$f_2(0) = 1 \text{ et } f_2(0,5) = -0,875 \quad \text{donc} \quad 0 < a_2 < 0,5$$

$$f_2(0,25) = 0,0156 \text{ et } f_2(0,5) = -0,875 \quad \text{donc} \quad 0,25 < a_2 < 0,5$$

$$f_2(0,25) = 0,0156 \text{ et } f_2(0,3) = -0,173 \quad \text{donc} \quad 0,25 < a_2 < 0,3$$

D'où $0,2 < a_2 < 0,3$ et par suite 0,2 est une valeur approchée par défaut de a_2 à 10^{-1} .

4. a) Pour tout entier $n \geq 2$, on a : $f_n(a_n) = 0$ et $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3} - 1$.

Or $n \geq 2$ donc $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$ ou encore $\frac{1}{n^3} < \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{n^3} - 1 < -\frac{7}{8}$ donc $f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$.

- b) On a : Pour tout entier $n \geq 2$, $f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0 \Leftrightarrow f_n\left(\frac{1}{n}\right) < f_n(a_n)$ et comme f_n est

strictement décroissante sur $[0, 1]$, alors nécessairement : $a_n < \frac{1}{n}$.

Ainsi, pour tout $n \geq 2$, $a_n \leq \frac{1}{n}$.

- c) Pour tout $n \geq 2$, $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ alors la suite (a_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Exercice 3:

1. Q est le milieu du segment [OB] donc l'affixe de Q est $z_Q = \frac{z_B}{2} = 2 + i\sqrt{3}$.

$$ABQK \text{ est un parallélogramme} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KQ} \Leftrightarrow z_B - z_A = z_Q - z_K$$

$$\Leftrightarrow z_K = z_Q - z_B + z_A \Leftrightarrow z_K = 3 - 2i\sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ a) } \frac{z_K - z_A}{z_K} &= \frac{3 - 2i\sqrt{3} - (5 - i\sqrt{3})}{3 - 2i\sqrt{3}} = \frac{-2 - i\sqrt{3}}{3 - 2i\sqrt{3}} = \frac{(-2 - i\sqrt{3})(3 + 2i\sqrt{3})}{(3 - 2i\sqrt{3})(3 + 2i\sqrt{3})} \\ &= \frac{-6 - 4i\sqrt{3} - 3i\sqrt{3} + 6}{9 + 12} = \frac{-7i\sqrt{3}}{21} = -i \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \frac{z_K - z_A}{z_K} = \frac{z_{AK}}{z_{OK}} \text{ est imaginaire pur.}$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AK} \perp \overrightarrow{OK}$ et par suite le triangle OKA est rectangle en K.

- b) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{OQ}$ est $2 + i\sqrt{3}$ et l'affixe du vecteur $\overrightarrow{KA}$ est $5 - i\sqrt{3} - 3 + 2i\sqrt{3} = 2 + i\sqrt{3}$.

Par suite $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{KA}$, d'où OQAK est un parallélogramme.

Comme de plus OKA est un triangle rectangle en K, on en déduit que OQAK est un rectangle.

$$3. \quad z_K = \frac{2}{3}z_A = \frac{2}{3}(5 - i\sqrt{3}) = \frac{10 - 2i\sqrt{3}}{3} \text{ donc}$$

$$\frac{z_K - z_B}{z_K - z_C} = \frac{3 - 2i\sqrt{3} - 4 - 2i\sqrt{3}}{3 - 2i\sqrt{3} - \frac{10 - 2i\sqrt{3}}{3}} = 3 \left(\frac{-1 - 4i\sqrt{3}}{-1 - 4i\sqrt{3}} \right) = 3. \text{ On en déduit que les points B, C et K}$$

sont alignés.

Exercice 4 :

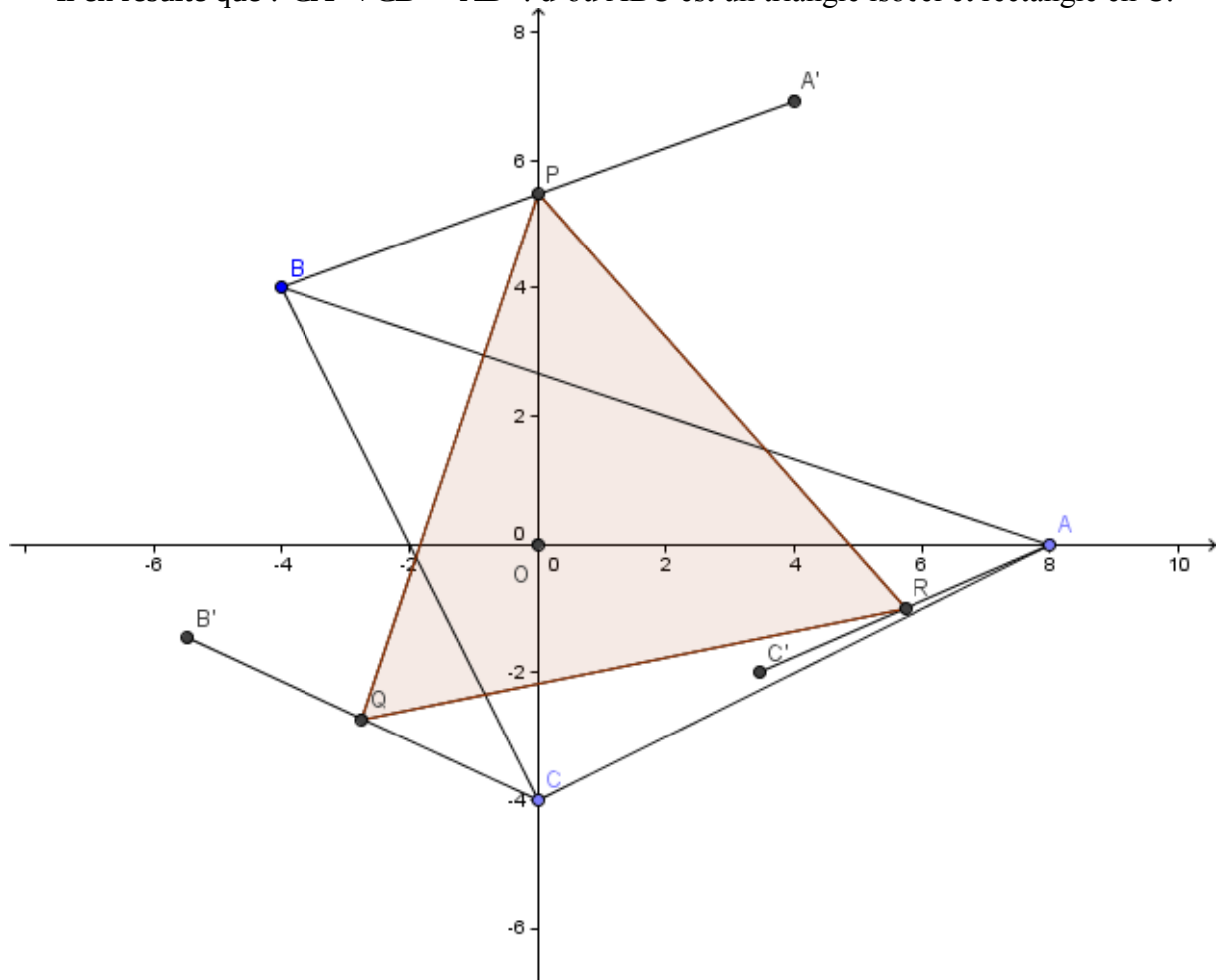
1. a) $a = 8 = 8e^{i0}$, $b = -4 + 4i = 4\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $c = -4i = 4e^{-i\frac{\pi}{2}}$.
b) Sur la figure le triangle ABC apparait isocèle et rectangle en C.

$$CA = |a - c| = |8 + 4i| = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{16(4 + 1)} = 4\sqrt{5}$$

$$CB = |b - c| = |-4 + 8i| = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{16(4 + 1)} = 4\sqrt{5}$$

$$AB = |b - a| = |-12 + 4i| = \sqrt{144 + 16} = \sqrt{16(9+1)} = 4\sqrt{10}$$

Il en résulte que : $CA^2 + CB^2 = AB^2$, d'où ABC est un triangle isocèle et rectangle en C.



2. a) En remarquant que $\frac{13\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{4}$, on peut écrire

$$\begin{aligned} b' &= 4\sqrt{2}e^{i\frac{13}{12}} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} = 4\sqrt{2} \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \left(\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2} \right) = (1+i\sqrt{3})(-2+2i) \\ &= -2 - 2\sqrt{3} + 2i - 2i\sqrt{3} = -2(1+i\sqrt{3}) + 2(1-\sqrt{3})i \end{aligned}$$

$$\text{b) } a' = 8e^{i\frac{\pi}{3}} = 8\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4 + 4i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad c' = -4ie^{i\frac{\pi}{3}} = -4i\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3} - 2i.$$

3. a) P est le milieu du segment $[A'B]$ $\Leftrightarrow p = \frac{a' + b}{2} \Leftrightarrow p = \frac{4 + 4i\sqrt{3} - 4 + 4i}{2} \Leftrightarrow p = i(2 + 2\sqrt{3})$

Q est le milieu du segment [B'C]

$$\Leftrightarrow q = \frac{b'+c}{2} \Leftrightarrow q = \frac{-2(1+\sqrt{3})+2(1-\sqrt{3})i-4i}{2} \Leftrightarrow q = -1-\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})i.$$

R est le milieu du segment [C'A] $\Leftrightarrow r = \frac{c'+a}{2} \Leftrightarrow r = \frac{2\sqrt{3}-2i+8}{2} \Leftrightarrow r = 4+\sqrt{3}-i.$

b) On a : $r-p = 4+\sqrt{3}-i-i(2+2\sqrt{3}) = 4+\sqrt{3}-i(3+2\sqrt{3})$

et $q-p = -1-\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})i-i(2+2\sqrt{3}) = -1-\sqrt{3}-i(3+3\sqrt{3}).$

$$\begin{aligned} \frac{r-p}{q-p} &= \frac{4+\sqrt{3}-i(3+2\sqrt{3})}{-1-\sqrt{3}-i(3+3\sqrt{3})} = \frac{-1}{1+\sqrt{3}} \frac{(4+\sqrt{3})-i(3+2\sqrt{3})}{1+3i} \\ &= \frac{-1}{10(1+\sqrt{3})} [(4+\sqrt{3})-i(3+2\sqrt{3})](1-3i) \\ &= \frac{-1}{10(1+\sqrt{3})} [(-5-5\sqrt{3})-i(15+5\sqrt{3})] \\ &= \frac{1}{2(1+\sqrt{3})} [(1+\sqrt{3})+i(3+\sqrt{3})] \\ &= \frac{1}{2(1+\sqrt{3})} (1+\sqrt{3})(1+i\sqrt{3}) \\ &= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= e^{i\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

Donc $r-p = e^{i\frac{\pi}{3}}(q-p).$

On en déduit :

$$|r-p| = \left| e^{i\frac{\pi}{3}}(q-p) \right| \Leftrightarrow |r-p| = |q-p| \Leftrightarrow PR = PQ$$

$$\begin{aligned} \text{et } r-p &= e^{i\frac{\pi}{3}}(q-p) \Leftrightarrow \frac{r-p}{q-p} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{r-p}{q-p}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{aligned}$$

D'où PQR est un triangle équilatéral.