

Le sujet comporte 3 pages dont la page -3- est à compléter et à rendre avec la copie

**Exercice 1 : (5 points)**

**NB :** les deux parties A et B sont indépendantes.

**A- Démonstration de cours .**

On donne deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies sur  $\mathbb{N}$  et vérifiant les trois conditions suivantes :

(i)  $(u_n)$  est croissante et  $(v_n)$  décroissante,

(ii) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq v_n$ ,

(iii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ .

1. a) Montrer que les conditions (i) et (ii) entraînent les inégalités : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq v_n \leq v_0$ .

b) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.

2. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_0 \leq u_n \leq v_n$  puis en déduire que  $(v_n)$  est convergente.

3. Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ont la même limite.

4. Énoncer théorème de cours ainsi démontré.

**B- QCM**

Répondre par Vrai ou Faux aux propositions suivantes sans aucune justification.

Toute réponse exacte rapporte 0,50 point, une réponse inexacte entraîne le retrait de 0,25 point et l'absence de réponse entraîne le retrait de 0,50 point. Si, par application de ce barème, le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à zéro.

1. a) Si une suite n'est pas majorée alors elle tend vers  $+\infty$ .

b) Si une suite tend vers  $+\infty$  alors elle n'est pas majorée.

2. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \sqrt{x^2 + 7}$

a)  $f$  est dérivable en 3 et  $f'(3) = \frac{3}{4}$ .

b)  $f(3,001) \approx f'(3) + 0,001 \times f(3)$ .

c)  $f(3,001) \approx 4,00075$

**Exercice 2 : (5 points)**

On définit la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0, \pi^2]$  par  $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ .

1. a) Vérifier que pour tout  $x$  de  $[0, \pi^2[$ ,  $f(x) - 1 = -\frac{\sin^2(\sqrt{x})}{1 + \cos(\sqrt{x})}$ .

b) En déduire que, pour tout  $x$  de  $]0, \pi^2[$ , 
$$\frac{f(x)-1}{x} = - \left[ \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right]^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos(\sqrt{x})}$$

c) Démontrer enfin que  $f$  est dérivable à droite en  $0$  et donner  $f'_d(0)$ .

2. a) Etudier la dérivabilité de  $f$  sur  $]0, \pi^2[$  et calculer  $f'(x)$  pour tout  $x$  de  $]0, \pi^2[$ .

b) Etudier le sens de variation de la fonction  $f$  et dresser son tableau de variation.

3. a) Résoudre dans  $[0, \pi^2]$  l'équation  $f(x) = 0$ .

b) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse  $\frac{\pi^2}{4}$ .

### Exercice 3 : (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On appelle  $g$  l'application du plan (P) dans lui-même qui à tout point  $M$ , d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$ , d'affixe  $z'$ , définie par :  $z' = i\bar{z} + 1 + i$ .

1. a) Montrer que  $g$  ne fixe aucun point.

b) Pour tous points  $M_1(z_1)$  et  $M_2(z_2)$ , on pose  $M'_1 = g(M_1)$  et  $M'_2 = g(M_2)$ .

Montrer que  $z'_2 - z'_1 = i\overline{(z_2 - z_1)}$ . En déduire que  $g$  est une isométrie.

2. On donne les points A, B et C d'affixes respectives :  $z_A = 1$ ,  $z_B = -1$  et  $z_C = 1 + 2i$

a) Déterminer les images des points A et B par  $g$ . En déduire que  $g$  n'est pas une translation.

b) En déduire la nature de  $g$  puis caractériser  $g$ .

### Exercice 4 : (5 points)

Dans le plan orienté, on considère deux droites perpendiculaires  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  et quatre points distincts A, B, C et D tels que : A et C sont sur la droite  $(\Delta)$ , B et D sont sur  $(\Delta')$ ,  $AC = BD$  et  $(\widehat{AC, BD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ . On suppose que les segments  $[AC]$  et  $[BD]$  n'ont pas même milieu.

Voir figure page 3.

1. a) Justifier qu'il existe une rotation  $R_1$  qui envoie A sur B et C sur D dont on précisera la mesure principale  $\theta_1$  de son angle.

b) Construire  $\Omega_1$  le centre de  $R_1$ .

2. Montrer qu'il existe une rotation  $R_2$  qui envoie D sur A et B sur C dont on précisera la mesure principale  $\theta_2$  de son angle et construire son centre  $\Omega_2$ .

3. On désigne par M le milieu de  $[AC]$  et N celui de  $[BD]$ .

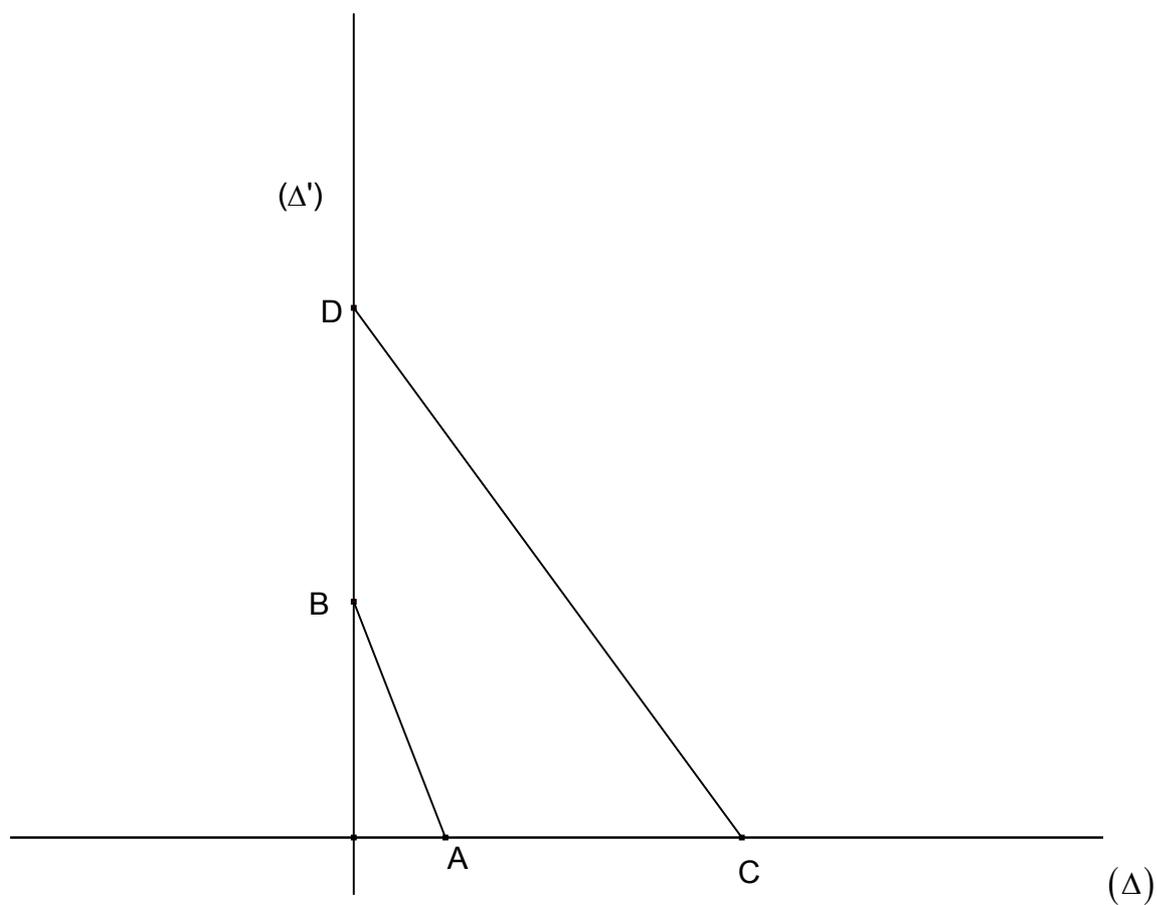
a) Montrer que  $R_1(M) = N$  et  $R_2(N) = M$ .

b) En déduire la nature du quadrilatère  $\Omega_1 M \Omega_2 N$ .

4. Caractériser l'application  $R_2 \circ R_1$

Nom & Prénom de l'élève : .....

Figure à compléter et à rendre avec la copie



Exercice 1 :

**A. Démonstration de cours**

1.a) La condition (i) entraîne que la suite  $(v_n)$  est majorée par son premier terme  $v_0$  donc pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $v_n \leq v_0$ .

En utilisant de plus la relation (ii), on obtient : pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $u_n \leq v_n \leq v_0$ .

b) La suite  $(u_n)$  est croissante et majorée par  $v_0$  donc  $(u_n)$  est convergente.

2. La suite  $(u_n)$  est croissante donc  $(u_n)$  est minorée par son premier terme  $u_0$ , d'où pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $u_0 \leq u_n$ .

En utilisant de plus la relation (ii), on obtient : pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $u_0 \leq u_n \leq v_n$ .

La suite  $(v_n)$  étant décroissante et minorée par  $u_0$ , il résulte que  $(v_n)$  est convergente.

3.  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites convergentes et comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$  alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

4. Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent vers la limite.

**B. QCM**

1. a) Faux ; b) Vrai

2. a) Vrai ; b) Faux ; c) Vrai

Exercice 2 :

1.a) Pour tout  $x$  de  $]0, \pi^2[$ ,  $0 \leq \sqrt{x} < \pi$  donc  $\cos(\sqrt{x}) \neq -1$ .

$$f(x) - 1 = \cos(\sqrt{x}) - 1 = \frac{\cos^2(\sqrt{x}) - 1}{\cos(\sqrt{x}) + 1} = \frac{-\sin^2(\sqrt{x})}{1 + \cos(\sqrt{x})}.$$

$$b) \text{ Pour tout } x \text{ de } ]0, \pi^2[, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - 1}{x} = -\frac{\sin^2(\sqrt{x})}{x(1 + \cos(\sqrt{x}))} = -\left[\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right]^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos(\sqrt{x})}.$$

$$c) \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1.$$

$$\text{D'autre part : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos(\sqrt{x}) = \cos 0 = 1.$$

$$\text{Ainsi : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{2}. \text{ Donc } f \text{ est dérivable à droite en } 0 \text{ et } f'_d(0) = -\frac{1}{2}.$$

2. a) La fonction  $u : x \mapsto \sqrt{x}$  est dérivable sur  $]0, \pi^2]$ ,  $u(]0, \pi^2]) = ]0, \pi]$  et la fonction  $\cos$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc dérivable sur  $]0, \pi]$ . Par conséquent,  $f$  est dérivable sur  $]0, \pi^2]$ .

Pour tout  $x$  de  $]0, \pi^2]$ ,  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos'(\sqrt{x}) = -\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ .

b)  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(\sqrt{x}) = 0 \\ 0 < x \leq \pi^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 0 < \sqrt{x} \leq \pi \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \pi \Leftrightarrow x = \pi^2$ .

D'autre part :  $0 < x < \pi^2 \Rightarrow 0 < \sqrt{x} < \pi \Rightarrow 0 < \sin(\sqrt{x}) < 1$  il en résulte que pour tout  $x$  de  $]0, \pi^2[$ ,  $f'(x) < 0$ .

x	0	$\pi^2$
f'(x)	$-\frac{1}{2}$	0
f(x)	1	-1



3.a)  $x \in [0, \pi^2]$ ,  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(\sqrt{x}) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Comme  $0 \leq \sqrt{x} \leq \pi$ ,  $\sqrt{x} = \frac{\pi}{2}$  ou encore  $x = \frac{\pi^2}{4}$ .

b) la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse  $\frac{\pi^2}{4}$  est d'équation  $y = f'\left(\frac{\pi^2}{4}\right)\left(x - \frac{\pi^2}{4}\right) + f\left(\frac{\pi^2}{4}\right)$

les calculs donnent  $f\left(\frac{\pi^2}{4}\right) = 0$  et  $f'\left(\frac{\pi^2}{4}\right) = -\frac{1}{\pi}$ , donc (T) :  $y = -\frac{1}{\pi}x + \frac{\pi}{4}$ .

Exercice 3 :

1. a) M est un point fixe de  $f \Leftrightarrow g(M) = M \Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow i\bar{z} + 1 + i = z$ .

On pose  $z = x + iy$  avec  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on obtient :

$$i(x - iy) + 1 + i = x + iy \Leftrightarrow y + 1 + i(x + 1) = x + iy \Leftrightarrow -x + y + 1 + i(x - y + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + 1 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

Ce système est impossible (la somme membre à membre de ses deux équations donne  $2 = 0$ ) donc  $g$  ne fixe aucun point.

b) On a :  $M_1' = g(M_1) \Leftrightarrow z_1' = -\bar{z}_1 + 1 + i$  et  $M_2' = g(M_2) \Leftrightarrow z_2' = -\bar{z}_2 + 1 + i$ .

D'où  $z_2' - z_1' = i(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) = i\overline{(z_2 - z_1)}$ .

Par suite,  $M_1'M_2' = |z_2' - z_1'| = |i\overline{(z_2 - z_1)}| = |i| \cdot |z_2 - z_1| = |z_2 - z_1| = M_1M_2$ .

Ce qui montre que  $g$  est une isométrie.

2. a) Pour  $z = z_A = 1$ ,  $z' = i + 1 + i = 1 + 2i = z_C$  donc  $g(A) = C$ .

Pour  $z = z_B = -1$ ,  $z' = -i + 1 + i = 1 = z_A$  donc  $g(B) = A$ .

$Z_{\overline{AC}} = 2i$  et  $Z_{\overline{BA}} = -2$  donc  $\overline{AC} \neq \overline{BA}$  d'où  $g$  n'est une translation.

b)  $g$  est une isométrie, distincte d'une translation, ne fixant aucun point donc  $g$  est une symétrie glissante.

Désignons par  $(\Delta)$  l'axe de  $g$  et par  $\vec{u}$  son vecteur.

Comme  $g \circ g = t_{2\vec{u}}$  et  $(g \circ g)(B) = g(A) = C$  alors  $2\vec{u} = \overline{BC}$  ou encore  $\vec{u} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ .

$g(B) = A$  et  $O$  milieu de  $[BA] \Rightarrow O \in (\Delta)$

$g(A) = C$  et  $I(1+i)$  milieu de  $[AC] \Rightarrow I \in (\Delta)$

On a  $I \neq O$  donc  $(\Delta) = (OI)$ .

Exercice 4 :

1. a) On a :  $AC = BD$ ,  $A \neq C$  et  $\left(\overline{AC}, \overline{BD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$  donc il existe une rotation  $R_1$  unique qui envoie  $A$  sur  $B$  et  $C$  sur  $D$  d'angle  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ .

b)  $\Omega_1$  le centre de la rotation  $R_1$  est le point d'intersection des médiatrices des segments  $[AB]$  et  $[BD]$ .

2. On a :  $BD = AC$ ,  $D \neq B$  et  $\left(\overline{DB}, \overline{AC}\right) \equiv \pi + \left(\overline{BD}, \overline{AC}\right)[2\pi]$   
 $\equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

donc il existe une rotation  $R_2$  unique qui envoie  $D$  sur  $A$  et  $B$  sur  $C$  d'angle  $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ .

3.a)  $M$  milieu de  $[AC]$  donc  $R_1(M)$  milieu de  $[R_1(A) R_1(C)] = [BD]$ .

Or  $N$  est milieu de  $[BD]$  alors  $R_1(M) = N$ .

$N$  milieu de  $[BD]$  donc  $R_2(N)$  milieu de  $[R_2(B) R_2(D)] = [AC]$ .

b)  $R_1(M) = N$  donc  $\Omega_1MN$  est un triangle isocèle, rectangle en  $\Omega_1$  et direct.

$R_2(N) = M$  donc  $\Omega_2NM$  est un triangle isocèle, rectangle en  $\Omega_2$  et direct.

Il en résulte que  $\Omega_1M\Omega_2N$  est un carré.

4.  $R_2 \circ R_1$  est la composée de deux déplacements de même angle  $\frac{\pi}{2}$  donc  $R_2 \circ R_1$  est un déplacement d'angle  $\pi$  d'où  $R_2 \circ R_1$  est une symétrie centrale.

Comme  $R_2 \circ R_1(M) = R_2(N) = M$  alors  $M$  est le centre de  $R_2 \circ R_1$ .

Ainsi  $R_2 \circ R_1 = S_M$

