LYCEE IBN KHALDOUN RADES Mr ABIDI Farid	DEVOIR DE SYNTHESE N°1 MATHEMATIQUES	Classes : 4M 1 & 2 Durée : 3h Année scolaire 2008-09

Exercice 1 : (3 points)

Les trois questions suivantes sont indépendantes. Répondre par **Vrai** ou **Faux** à chacune des propositions données . Aucune justification n'est demandée.

1. Soit f une fonction continue sur [0, 1], strictement croissante sur [0, 1] et dérivable sur]0, 1[. Si l'on sait de plus que f(0) = -1 et f(1) = 1, alors :

   a) L'équation f(x) = 0 admet une unique solution α dans]0, 1[.

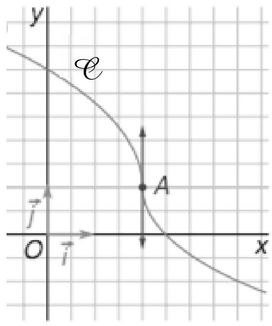
   b) L'équation $f'(x)=-2$ admet au moins une solution dans]0, 1[.

2. Soit f , g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et vérifiant pour tout x réel , $f(x)\le g(x)\le h(x)$.
   Si l'on sait de plus que : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ alors :

   a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$.

3. $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f passant par A(2,1)

   a) f est dérivable en 2 ; **b)** A est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$.



Exercice 2: (6 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ par f(x) = $1+\sin(\pi x)$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ sur [0, 2].

2. a) Montrer que f^{-1}, la fonction réciproque de f , est dérivable sur]0, 2[.

   b) Déterminer pour tout x de]0, 2[, $(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{2x-x^2}}$.

3. On pose pour tout x de [0, 2], $g(x)=f^{-1}(2-x)+f^{-1}(x)$.

   a) Montrer que g est dérivable sur]0, 2[puis calculer, pour tout x de]0, 2[, g'(x).

   b) En déduire que pour tout x de [0 , 2] , $f^{-1}(2-x)=-f^{-1}(x)$.

4. On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} f^{-1}\left(1+\dfrac{1}{n+k}\right)$.

   a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{n+1}{n}f^{-1}\left(\dfrac{2n+1}{2n}\right)\le u_n\le\dfrac{n+1}{n}f^{-1}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(1-\frac{1}{n+k}\right)$.

Exercice 3: (5 points)

α est un réel de $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$, on considère l'équation (E) : $z^2-\left(e^{i\alpha}-ie^{-i\alpha}+2\right)z-i+2e^{\,i\alpha}=0$.

1. a) vérifier que $z_1=e^{i\alpha}$ est solution de (E).

   b) Déterminer z_2 l'autre solution de (E) puis vérifier que $z_2=-i\overline{z_1}+2$.

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A, B, M_1 et M_2 d'affixes respectives 1, i , z_1 et z_2.

   a) Montrer que l'application φ du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z'=-i\overline{z}+2$ est une symétrie glissante que l'on caractérisera.

   b) Montrer que, lorsque α décrit $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$, M_1 décrit l'arc $\overset{\frown}{BA}$ du cercle trigonométrique de centre O.

   c) En déduire l'ensemble des points M_2 lorsque α décrit $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$.

Exercice 4: (6 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC de sens direct inscrit dans un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O. On note I le milieu du segment [BC] et D le symétrique de A par rapport à O .

1. Montrer que AO = DB et que I est milieu du segment [OD].
2. Soit f une isométrie du plan qui envoie A sur D et O sur B. On pose g = $t_{\overrightarrow{BO}}\circ f$ et K le point d'intersection des médiatrices des segments [AD] et [BO].

   a) Déterminer g(O) et g(A). En déduire que $g = S_{(BO)}$ ou $g = r_{\left(O,-\frac{2\pi}{3}\right)}$.

   b) Montrer que l'on a : $f=t_{\overrightarrow{OB}}\circ S_{(BO)}$ ou $f=r_{\left(K,-\frac{2\pi}{3}\right)}$.

3. On désigne par $f_1=t_{\overrightarrow{OB}}\circ S_{(BO)}$ et $f_2=r_{\left(K,-\frac{2\pi}{3}\right)}$.

   a) Déterminer $f_2^{-1}\circ f_1(O)$ et $f_2^{-1}\circ f_1(A)$.

   b) En déduire l'ensemble des points M du plan tels que $f_1(M)=f_2(M)$.

Exercice 1: (3 points)

1. a) Vrai ; b) Faux
2. a) Faux ; b) Vrai
3. a) Faux ; b) Faux

Exercice 2: (6 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ par f(x) = $1+\sin(\pi x)$.

1. f est continue est dérivable sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

   Pour tout x de $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, $f'(x)=\pi\cos(\pi x)$.

   Or $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{\pi}{2}\le\pi x\le\frac{\pi}{2}$ donc $\cos(\pi x)\ge 0$

   d'où $f'(x)\ge 0$ et $f'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\\ \cos(\pi x)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}$ ou $x=\frac{\pi}{2}$.

   Ainsi f est strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

   Par suite , f réalise une bijection de $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ sur $f\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right)=\left[f\left(-\frac{\pi}{2}\right),f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$ = [0, 2].

2. a) f est dérivable sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ et $f'(x)\neq 0$ pour tout x de $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ donc f^{-1} est dérivable sur $f\left(\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[\right)=]0,2[$.

   b) On a : $\begin{cases}-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\\ f(x)=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<y<2\\ f^{-1}(y)=x\end{cases}$

   $(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{\pi\cos(\pi x)}$.

   Exprimons $(f^{-1})'(y)$ en fonction de y :

   Comme pour tout x de $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ $\cos(\pi x)>0$ et $\sin(\pi x)=y-1$ alors

   $\cos(\pi x)=\sqrt{1-\sin^2(\pi x)}=\sqrt{1-(y-1)^2}=\sqrt{2y-y^2}$.

Par conséquent , pour tout x de]0, 2[, $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{2x-x^2}}$.

3. Pour tout x de [0, 2], $g(x)=f^{-1}(2-x)+f^{-1}(x)$.

a) f^{-1} est dérivable sur]0, 2[. La fonction $x\mapsto 2-x$ est dérivable sur]0, 2[.

D'autre part : $0<x<2\Leftrightarrow -2<-x<0\Leftrightarrow 0<2-x<2$ .Il en résulte que la fonction $x\mapsto f^{-1}(2-x)$ est dérivable sur]0, 2[.

Ainsi g est dérivable sur]0, 2[.

Pour tout x de]0, 2[,

$$g'(x)=-\left(f^{-1}\right)'(2-x)+\left(f^{-1}\right)(x)=-\frac{1}{\pi\sqrt{2(2-x)-(2-x)^2}}+\frac{1}{\pi\sqrt{2x-x^2}}$$

$$=-\frac{1}{\pi\sqrt{(2-x)\left[2-(2-x)\right]}}+\frac{1}{\pi\sqrt{2x-x^2}}=-\frac{1}{\pi\sqrt{2x-x^2}}+\frac{1}{\pi\sqrt{2x-x^2}}=0$$

b) la fonction est donc constante sur l'intervalle [0, 2] et on a pour tout x de [0 , 2] ,

$g(x)=g(1)\Leftrightarrow f^{-1}(2-x)+f^{-1}(x)=2f^{-1}(1)$.

Or f(0) = 1 donc $f^{-1}(1)=0$ et par suite pour tout x de [0, 2], $f^{-1}(2-x)+f^{-1}(x)=0$ ou encore $f^{-1}(2-x)=-f^{-1}(x)$.

4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}f^{-1}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)$.

a) la fonction f est strictement croissante sur $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ donc sa bijection réciproque f^{-1} est strictement croissante sur [0, 2].

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout k de $\{0,1,...,n\}$,

$$0\le k\le n\Leftrightarrow n\le n+k\le 2n\Leftrightarrow \frac{1}{2n}\le\frac{1}{n+k}\le\frac{1}{n}\Leftrightarrow 1+\frac{1}{2n}\le 1+\frac{1}{n+k}\le 1+\frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n+1}{2n}\le 1+\frac{1}{n+k}\le\frac{n+1}{n}\Leftrightarrow f^{-1}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)\le f^{-1}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)\le f^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

donc $\sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(\frac{2n+1}{2n}\right) \le \sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(1+\frac{1}{n+k}\right) \le \sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$\Leftrightarrow (n+1) f^{-1}\left(\frac{2n+1}{2n}\right) \le \sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(1+\frac{1}{n+k}\right) \le (n+1) f^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)$

D'où pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\frac{n+1}{n} f^{-1}\left(\frac{2n+1}{2n}\right) \le u_n \le \frac{n+1}{n} f^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

b) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n} = 1$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right) = f^{-1}(1) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}\left(\frac{2n+1}{2n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}\left(1+\frac{1}{2n}\right) = f^{-1}(1) = 0$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} f^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} f^{-1}\left(\frac{2n+1}{2n}\right) = 0$.

Il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

D'autre part : pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout k de $\{0,1,...,n\}$,

$f^{-1}\left(1-\frac{1}{n+k}\right) = f^{-1}\left(2-\left(1+\frac{1}{n+k}\right)\right) = -f^{-1}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)$.

Il en suit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(1-\frac{1}{n+k}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(1+\frac{1}{n+k}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 3: (5 points)

α est un réel de $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$, on considère l'équation (E) : $z^2 - \left(e^{i\alpha} - ie^{-i\alpha} + 2\right)z - i + 2e^{i\alpha} = 0$.

1. a) $e^{2i\alpha} - \left(e^{i\alpha} - ie^{-i\alpha} + 2\right)e^{i\alpha} - i + 2e^{i\alpha} = e^{2i\alpha} - e^{2i\alpha} + i - 2e^{i\alpha} - i + 2e^{i\alpha}$

   donc $z_1 = e^{i\alpha}$ est solution de (E).

   b) l'autre solution z_2 de (E) vérifie $z_1 + z_2 = e^{i\alpha} - ie^{-i\alpha} + 2 \Leftrightarrow z_2 = -ie^{-i\alpha} + 2$.

   $z_2 = -i\overline{e^{i\alpha}} + 2 = -i\overline{z_1} + 2$.

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, M_1 et M_2 d'affixes respectives 1, i , z_1 et z_2 .

a) Soit l'application φ du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = -i\bar{z} + 2$.

Comme $|-i| = 1$ alors φ est un antidéplacement.

D'autre part :

soit M(z) , on note M'(z') l'image de M par φ et $M''(z'')$ l'image de M' par φ.

Ainsi, $\varphi \circ \varphi(M) = M''$.

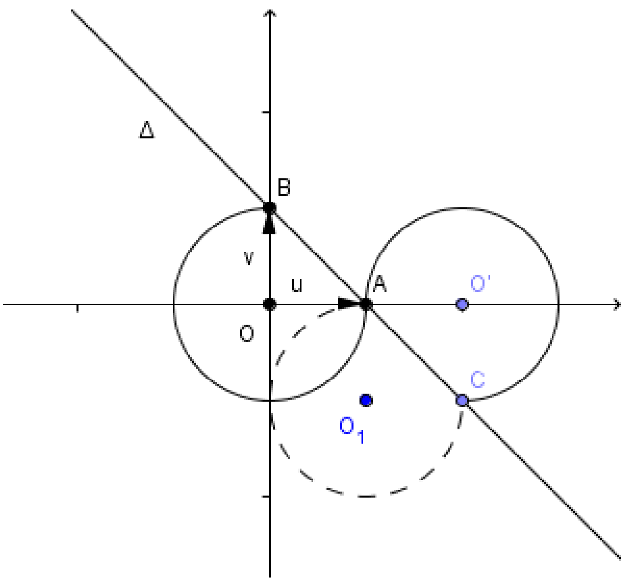
On a : $z' = -i\bar{z} + 2$ et $z'' = -i\,\overline{z'} + 2 = -i\left(\overline{-i\bar{z}+2}\right) + 2 = -i(iz+2) + 2 = z + 2 - 2i$.

Par suite, $\varphi \circ \varphi$ est la translation de vecteur $2\vec{w}$ tel que $\vec{w}$ d'affixe $1-i$.

Comme $\varphi \circ \varphi \neq Id_P$, alors φ est une symétrie glissante de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $1-i$.

Soit $O' = \varphi(O)$, l'affixe de O' est $z_{O'} = 2$. Soit I le milieu du segment [OO'], I est d'affixe $z_I = \frac{z_{O'}}{2} = 1$ donc I est le point A. Ainsi l'axe de φ est donc la droite (Δ) passant par A de vecteur $\vec{w}$ ou encore la droite (AB).

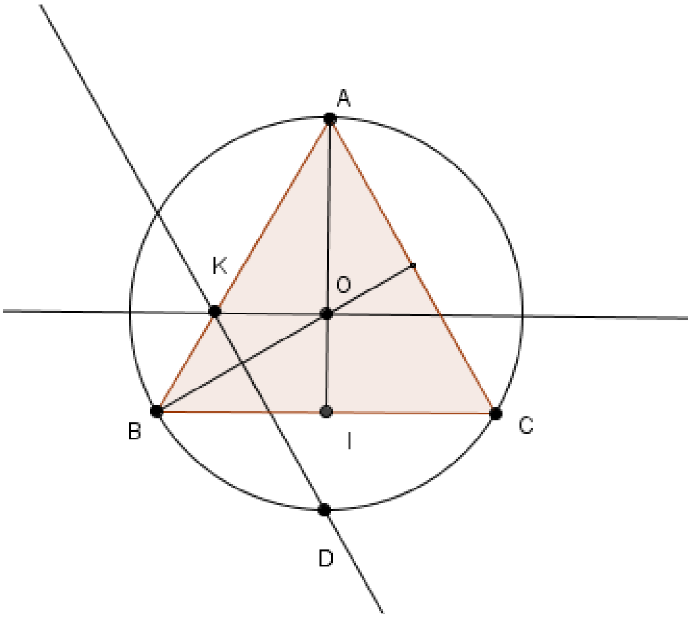
b) Lorsque α décrit $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$, M_1 d'affixe $z_1 = e^{i\alpha}$ appartient au cercle trigonométrique ($\mathscr{C}$) de centre O . Or B et A sont les points de ($\mathscr{C}$) d'affixe respectives $z_B = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $z_A = 1 = e^{i0}$ donc lorsque α décrit $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$, décrit l'arc $\widehat{BA}$ du cercle ($\mathscr{C}$).



c) Lorsque α décrit $\left[\dfrac{\pi}{2}, 2\pi\right]$, M_1 décrit l'arc $\widehat{BA}$ du cercle $(\mathscr{C})$ alors $M_2 = \varphi(M_1)$ décrit l'arc $\widehat{AC}$ image par φ de l'arc $\widehat{BA}$ du cercle $\mathscr{C}' = \varphi(\mathscr{C})$ de centre O' et de rayon 1 avec C = $\varphi(A)$ et d'affixe 2 – i.

Exercice 4: (6 points)

$(\mathscr{C})$



1. (AI) est la médiatrice du segment [BC] et D le symétrique de O par rapport à (BC) donc **I est le milieu du segment [OD] .**

Or O est le centre du cercle $(\mathscr{C})$ circonscrit au triangle équilatéral ABC donc O est le centre de gravité de ABC d'où AO = 2 OI = OD.

Et comme OA = OB alors OB = OD.

D'autre part, $\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right)[2\pi]$ d'où $\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)[2\pi]$

Il en résulte que $\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

Ainsi le triangle ABC est équilatéral et par suite OB = OD = BD.

On conclue que : **AO = BD**.

2. Soit f une isométrie du plan qui envoie A sur D et O sur B. On pose g = $t_{\overrightarrow{BO}} \circ f$ et K le point d'intersection des médiatrices des segments [AD] et [BO].

a) $g(O) = t_{\overrightarrow{BO}} \circ f(O) = t_{\overrightarrow{BO}}[f(O)] = t_{\overrightarrow{BO}}(B) = O$

et $g(A) = t_{\overrightarrow{BO}} \circ f(A) = t_{\overrightarrow{BO}}[f(A)] = t_{\overrightarrow{BO}}(D) = C$ car OBDC est un losange de centre I.

g est une isométrie fixant le point O et $g(A) \neq A$ donc $g \neq Id_P$ donc g est la symétrie orthogonale d'axe la médiatrice de [AC] ou g est la rotation de centre O et d'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right) \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

Ainsi : $g = S_{(BO)}$ ou $g = r_{\left(O,-\frac{2\pi}{3}\right)}$.

b) $g = S_{(BO)} \Leftrightarrow t_{\overrightarrow{BO}} \circ f = S_{(BO)} \Leftrightarrow t_{\overrightarrow{OB}} \circ t_{\overrightarrow{BO}} \circ f = t_{\overrightarrow{OB}} \circ S_{(BO)} \Leftrightarrow f = t_{\overrightarrow{OB}} \circ S_{(BO)}$

ou $g = r_{\left(O,-\frac{2\pi}{3}\right)} \Leftrightarrow t_{\overrightarrow{BO}} \circ f = r_{\left(O,-\frac{2\pi}{3}\right)} \Leftrightarrow f = t_{\overrightarrow{OB}} \circ r_{\left(O,-\frac{2\pi}{3}\right)}$

f est donc la composée d'une translation et d'une rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ donc f est une rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

D'autre part f envoie A sur D et O sur B, donc le centre de la rotation f est le point d'intersection des médiatrices des segments [AD] et [OB] d'où est K le centre de f.
Et on écrit $f = r_{\left(K,-\frac{2\pi}{3}\right)}$

3. On désigne par $f_1 = t_{\overrightarrow{OB}} \circ S_{(BO)}$ et $f_2 = r_{\left(K,-\frac{2\pi}{3}\right)}$.

a) $f_1(O) = t_{\overrightarrow{OB}} \circ S_{(BO)}(O) = t_{\overrightarrow{OB}}(O) = B$ donc $f_2^{-1} \circ f_1(B) = f_2^{-1}(f_1(O)) = f_2^{-1}(B) = O$.

$f_1(A) = t_{\overrightarrow{OB}} \circ S_{(BO)}(A) = t_{\overrightarrow{OB}}(C) = D$ donc $f_2^{-1} \circ f_1(A) = f_2^{-1}(f_1(A)) = f_2^{-1}(D) = A$

b) $f_1(M) = f_2(M) \Leftrightarrow f_2^{-1}[f_1(M)] = M \Leftrightarrow f_2^{-1} \circ f_1(M) = M$.

Or f_1 est la composée d'une translation et d'une symétrie orthogonale d'où f_1 est un antidéplacement et f_2 est un déplacement ou encore f_2^{-1} est un déplacement donc $f_2^{-1} \circ f_1$ est un antidéplacement.

Et comme $f_2^{-1} \circ f_1$ fixe les points O et A alors est $f_2^{-1} \circ f_1 = S_{(OA)}$.

Ainsi, $S_{(OA)}(M) = M \Leftrightarrow M \in (OA)$.

L'ensemble des points M du plan tels que $f_1(M) = f_2(M)$ est la droite (OA).