



Calcul d'aires et de volumes

Exercice 1 :

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x - x^2$.

On désigne par (C) et (C') les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. Soit (P) la partie du plan limitée par les courbes (C) et (C') et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Calculer $\mathcal{A}$ l'aire, en unité d'aire, de (P) .

2. Soit (P') la partie du plan limitée par la courbe (C') et les droites d'équations respectives $x = 0$, $x = 1$ et $y = 1$.

Calculer $\mathcal{A}'$ l'aire, en unités d'aire, de (P') .

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \cos x + \cos^2 x$.

1. Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.
2. Calculer l'aire de la surface délimitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \pi$.
3. Calculer la valeur moyenne $\bar{f}$ de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et en donner une interprétation géométrique.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + 5 - \frac{4}{x^2}$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions a , b et c que l'on calculera. On prendra $a < b < c$.
2. Etudier la fonction f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé.
3. Calculer l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives $x = a$, $x = b$ et $y = 0$.



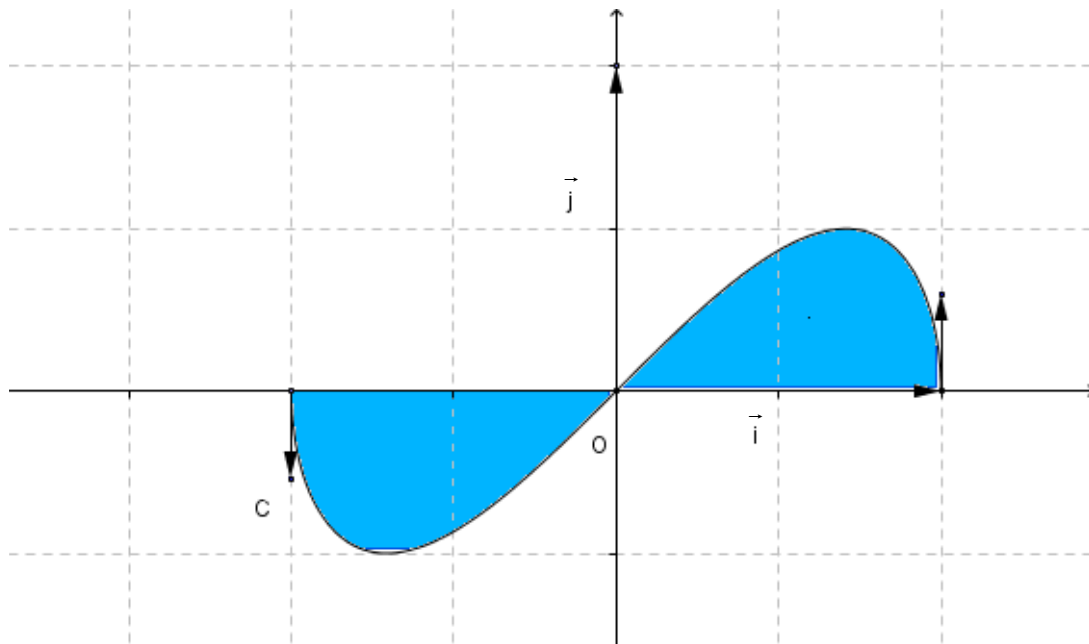
Calcul d'aires et de volumes

Exercice 4

1. Montrer que pour tout x de $[0 ; 2]$, $1 - \frac{x}{2} \leq \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \leq 1$.
2. En déduire un encadrement de l'intégrale $I = \int_0^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx$.
Donner une interprétation graphique du résultat.

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1, 1]$ par $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ dont la courbe (C) est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



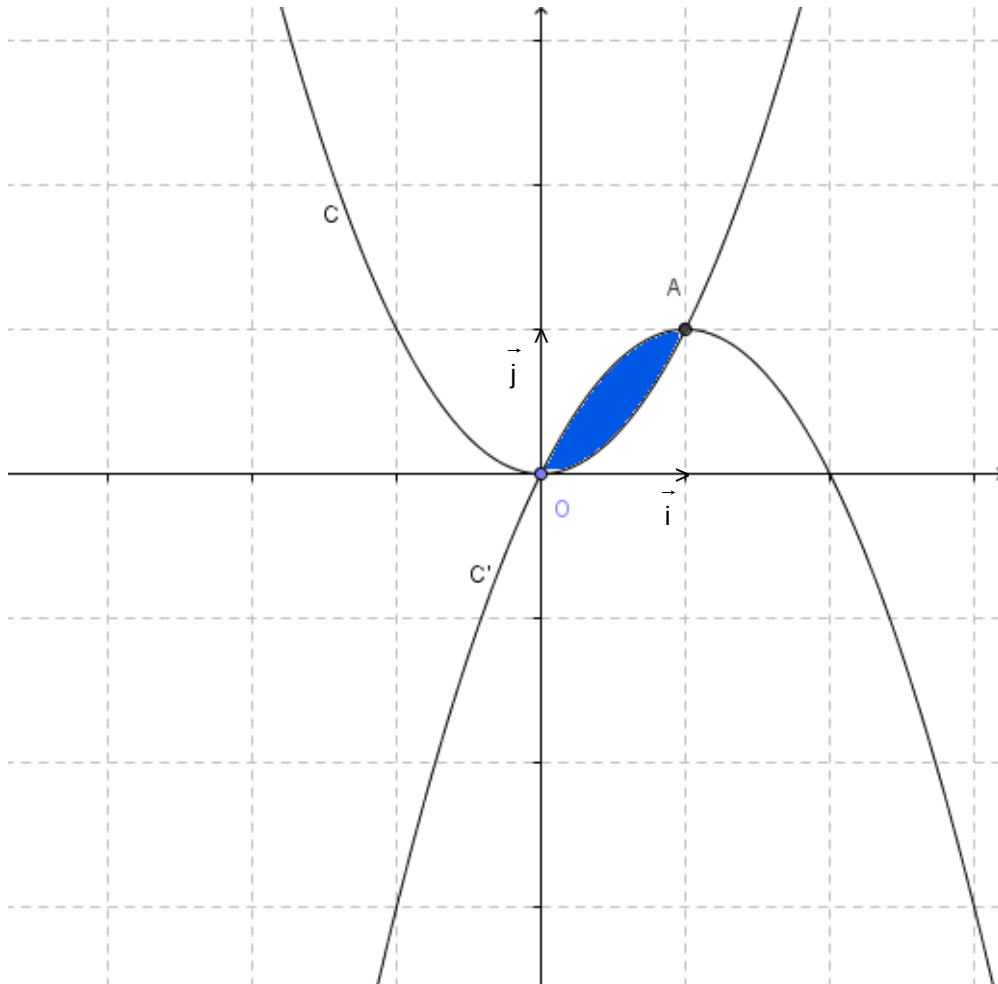
1. Calculer l'aire, en ua, de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations respectives $x = -1$, $x = 1$ et $y = 0$.
2. Calculer le volume, en uv, du solide engendré par rotation de (C) autour de l'axe des abscisses.



Calcul d'aires et de volumes

Exercice 1 :

Remarquons que la courbe (C) est une parabole de sommet O et d'axe la droite des ordonnées passant par le point A(1,1) et (C') est une parabole de sommet A(1,1), d'axe la droite d'équation $x = 1$ et passant par O.



1. Comme pour tout x de $[0, 1]$, $f(x) \leq g(x)$ alors l'aire, en ua, de la partie ($\mathcal{P}$) du plan limitée par les courbes (C) et (C') et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ est :

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx = \int_0^1 (2x - 2x^2) dx = \left[x^2 - \frac{2}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

3. L'aire, en ua, de la partie ($\mathcal{P}'$) limitée par la courbe (C') et les droites d'équations respectives $x = 0$, $x = 1$ et $y = 1$ est :

$$\mathcal{A}' = \int_0^1 (1 - g(x)) dx = \int_0^1 (1 - 2x + x^2) dx = \left[x - x^2 + \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$



Calcul d'aires et de volumes

Exercice 2 :

1. f est dérivable sur $[0, \pi]$ et pour tout x de $[0, \pi]$,

$$f'(x) = -\sin x - 2\sin x \cdot \cos x = -\sin x(2\cos x + 1).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \pi \\ \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \pi.$$

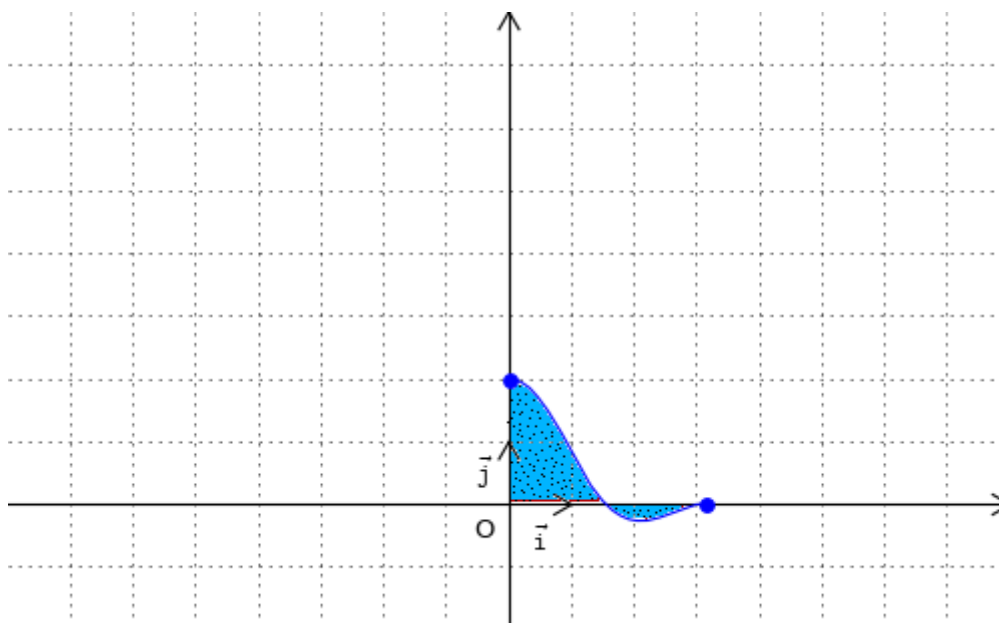
On sait que pour tout x de $[0, \pi]$, $\sin x \geq 0$. Donc le signe de $f'(x)$ est le signe contraire de $2\cos x + 1$.

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
$2\cos x + 1$	+	0	-
$f'(x)$	0	-	0
$f(x)$	2	$-\frac{1}{4}$	0

Cherchons l'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x(\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \pi \\ \cos x = 0 \\ \cos x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \pi.$$

Ainsi, la courbe traverse l'axe $(O, \vec{i})$ aux points d'abscisses respectives $\frac{\pi}{2}$ et π .





Calcul d'aires et de volumes

2. L'aire de la surface délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \pi$ est donnée par :

$$\mathcal{A} = \int_0^\pi |f(x)| dx \text{ ou } \mathcal{A} = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f(x) dx \right) \text{ cm}^2.$$

Cherchons une primitive F de f sur $[0, \pi]$:

$$\text{On a : } f(x) = \cos x + \frac{1}{2}(\cos 2x + 1) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } F(x) = \sin x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x.$$

$$\text{Ainsi, } \mathcal{A} = \left([F(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - [F(x)]_{\frac{\pi}{2}}^\pi \right) \text{ cm}^2 = \left(\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \right) = 2 \text{ cm}^2.$$

$$3. \text{ On a : } \bar{f} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4 + \pi}{2\pi}.$$

$\bar{f}$ est la largeur du rectangle d'aire $\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) \text{ cm}^2$ et de longueur $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 3 :

$$\begin{aligned} 1. f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2} = 0 \text{ et } x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x^3 + 5x^2 - 4 = 0 \quad (\text{E}) \end{aligned}$$

On remarque que 1 est une solution évidente de l'équation (E), donc il existe deux réels α et β tels que pour tout x réel : $x^3 + 5x^2 - 4 = (x+1)(x^2 + \alpha x + \beta)$.

$$\text{Or pour tout } x \text{ réel, } x^3 + 5x^2 - 4 = (x+1)(x^2 + \alpha x + \beta) = x^3 + (1+\alpha)x^2 + (\beta+\alpha)x + \beta$$

$$\text{D'où } \begin{cases} \alpha + 1 = 5 \\ \beta + \alpha = 0 \\ \beta = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = -4 \end{cases}.$$

$$\text{Par suite, } f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 + 4x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 - 2\sqrt{2} \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x = -2 + 2\sqrt{2}$$

$$\text{D'où } a = -2 - 2\sqrt{2}, b = -1 \text{ et } c = -2 + 2\sqrt{2}.$$



Calcul d'aires et de volumes

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty.$$

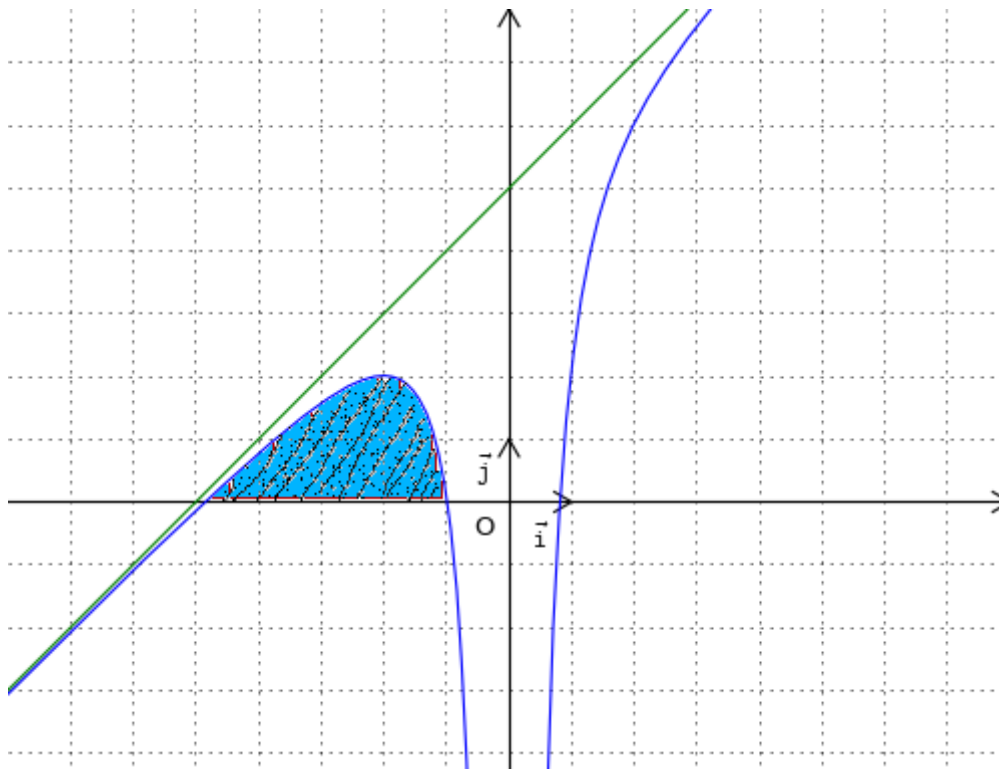
$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - (x+5) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} -\frac{4}{x^2} = 0.$$

Ainsi, la courbe (C) de f admet pour asymptotes les droites d'équations respectives $y = 0$ et $y = x + 5$.

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 + 8}{x^3}$.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $x(x+2)$, d'où les variations de f :

x	0	2	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	2	$-\infty$	$+\infty$





Calcul d'aires et de volumes

3. Sur l'intervalle $[a, b] = [-2 - 2\sqrt{2}, -1]$, f est continue et positive donc l'aire cherchée est

$$\text{égale à : } \int_a^b f(x) dx \text{ ua} = \left[\frac{x^2}{2} + 5x + \frac{4}{x} \right]_a^b \text{ ua} = \left(-\frac{17}{2} - (-2 - 8\sqrt{2}) \right) \text{ ua} = \left(8\sqrt{2} - \frac{13}{2} \right) \text{ ua}.$$

Exercice 4 :

1. Comme $0 \leq x \leq 2$, on en déduit que $-1 \leq -\frac{x}{2} \leq 0$ d'où $0 \leq 1 - \frac{x}{2}$.

$$\text{Par ailleurs, } 1 - \frac{x^2}{4} = \left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{2}\right).$$

Comme $1 - \frac{x}{2} \geq 0$ et $1 + \frac{x}{2} \geq 0$, on en déduit que $1 - \frac{x^2}{4} \geq 0$.

Pour comparer les nombres $1 - \frac{x}{2}$, $\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ et 1 qui sont positifs, il suffit de comparer leurs carrés qui sont rangés dans le même ordre.

$$\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 = 1 - x + \frac{x^2}{4}, \quad \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\right)^2 = 1 - \frac{x^2}{4} \quad \text{et} \quad 1^2 = 1.$$

Montrons que, pour tout $x \in [0 ; 2]$, $1 - x + \frac{x^2}{4} \leq 1 - \frac{x^2}{4}$ ou bien $-x + \frac{x^2}{2} \leq 0$ ou encore

$$-x\left(1 - \frac{x}{2}\right) \leq 0.$$

Cette dernière inégalité est vraie car on a : $-x \leq 0$ et $1 - \frac{x}{2} \geq 0$.

Il est évident, par ailleurs que $1 - \frac{x^2}{4} \leq 1$

Donc on obtient l'encadrement, pour tout $x \in [0 ; 2]$: $\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 \leq \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\right)^2 \leq 1^2$ ce qui

permet de conclure que, pour tout $x \in [0 ; 2]$: $1 - \frac{x}{2} \leq \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \leq 1$.

Si $0 \leq x \leq 2$ alors $0 \leq \frac{x}{2} \leq 1$ d'où $-1 \leq -\frac{x}{2} \leq 0$ d'où $0 \leq 1 - \frac{x}{2} \leq 1$.

On en déduit que, pour $x \in [0 ; 2]$, $1 - \frac{x}{2} \geq 0$.



Calcul d'aires et de volumes

Par ailleurs, si $0 \leq x \leq 2$ alors $0 \leq x^2 \leq 4$ d'où $0 \leq \frac{x^2}{4} \leq 1$ d'où $-1 \leq -\frac{x^2}{4} \leq 0$.

On en déduit que $0 \leq 1 - \frac{x^2}{4} \leq 1$ d'où, pour $x \in [0 ; 2]$, $1 - \frac{x^2}{4} \geq 0$.

On va comparer, pour $x \in [0 ; 2]$, les carrés des nombres positifs $1 - \frac{x}{2}$, $\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ et 1 :

$$\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{2-x}{2}\right)^2 = \frac{(2-x)^2}{4} = \frac{(2-x)(2-x)}{4}$$

$$\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}^2 = 1 - \frac{x^2}{4} = \frac{4-x^2}{4} = \frac{(2-x)(2+x)}{4}$$

Pour $x \in [0 ; 2]$, on a : $2-x \leq 2+x$; on en déduit que $\frac{(2-x)(2-x)}{4} \leq \frac{(2-x)(2+x)}{4}$.

$$1^2 = 1 \text{ et } \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}^2 = 1 - \frac{x^2}{4} \text{ d'où } \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \leq 1.$$

$$\text{Finalement on a : } \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 \leq \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}^2 \leq 1^2.$$

Des nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leur carré donc, pour

$$x \in [0 ; 2], \text{ on a : } 1 - \frac{x}{2} \leq \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \leq 1.$$

2) L'intégrale existe bien car la fonction : $x \mapsto \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ est continue sur $[0 ; 2]$ car

$$x \mapsto 1 - \frac{x^2}{4} \text{ est continue et positive sur } [0, 2].$$

On déduit de ce qui précède un encadrement de l'intégrale $I = \int_0^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx$:

$$\int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx \leq \int_0^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx \leq \int_0^2 dx$$



Calcul d'aires et de volumes

$$\int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx = \left[x - \frac{x^2}{4}\right]_0^2 = 2 - \frac{2^2}{4} - \left(0 - \frac{0^2}{4}\right) = 2 - 1 - 0 = 1$$

$$\int_0^2 dx = 2.$$

Donc on obtient l'encadrement de l'intégrale I suivant : $1 \leq I \leq 2$.

Interprétation graphique de ce résultat :

Si on note f la fonction définie sur $[0 ; 2]$ par $f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ alors, comme f est positive sur $[0 ; 2]$, I représente l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 2$.

Cette aire est comprise entre une et deux unités d'aire.

Exercice 5 :

1. La fonction f est impaire sur $[-1, 1]$ donc $\int_{-1}^0 f(x) dx = -\int_0^1 f(x) dx$.

L'aire, en ua, de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations respectives $x = -1$, $x = 1$ et $y = 0$ est donnée par :

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^1 |f(x)| dx = -\int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx = 2 \left[-\frac{1}{3} (1 - x^2) \sqrt{1 - x^2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

2. Compte tenu des symétries, le volume cherché est :

$$V = 2 \int_0^1 \pi f^2(x) dx = 2\pi \int_0^1 x^2 (1 - x^2) dx = 2\pi \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 = \frac{4\pi}{15}.$$