Fonction logarithme népérien

Exercice 1 :

a) Calculer, pour tout entier n tel que $n \geq 2$, $u_n = \sum_{k=2}^{k} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

b) En déduire $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

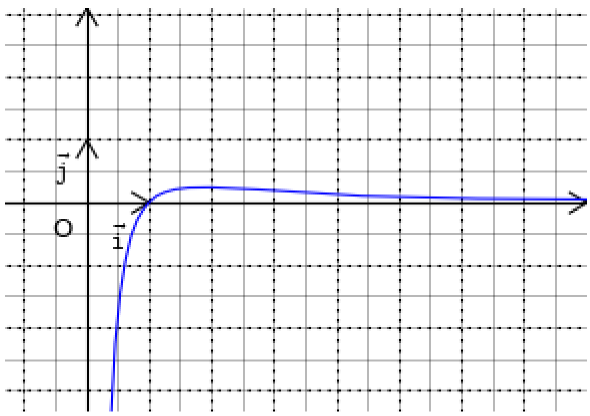
Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{2\ln x}{x^2 + x}$.

a) Montrer que pour tout x > 1, $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$.

b) Calculer les intégrales $I = \int_2^4 \frac{\ln x}{x} dx$ et $J = \int_2^4 \frac{\ln x}{x^2} dx$ (on pourra utiliser une intégration par parties pour calculer J).

c) Ci-contre est tracée la courbe (C) Représentative de f dans un repère Orthonormé du plan.



Soit A , exprimée en unité d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe (C) et les droites d'équations respectives x = 2, x = 4 et y = 0.

Donner un encadrement de A.

Exercice 3 :

1. Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = \frac{\ln}{x^2}$.

a) Dresser el tableau de variations de g.

b) En déduire que pour tout couple de réels (a, b) tels que b > a ≥ 2, on a :

$$(b-a)g(b) \leq \int_a^b g(x)dx \leq (b-a)g(a).$$

Fonction logarithme népérien

c) D'après la question précédente, montrer que pour tout entier n , $n \geq 2$, on a :

$$\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} g(x)dx \leq \frac{\ln n}{n^2}.$$

2. Pour tout entier n, $n \geq 1$, on pose : $S_n = \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} + \ldots + \frac{\ln n}{n^2}$.

a) En utilisant la question 1.c), montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$S_n - \frac{\ln 2}{n^2} \leq \int_2^n g(x)dx \leq S_n - \frac{\ln n}{n^2}.$$

b) En déduire que : $\frac{1+\ln 2}{2} - \frac{n+(n-1)\ln n}{n^2} \leq S_n \leq \frac{2+3\ln 2}{4} - \frac{1+\ln n}{n}$.

c) Quel encadrement de S_{100} obtient-on par deux nombres décimaux à partir de la question 2.b) ?

Exercice 4

Soit f et F les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}}$ et $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

1. a) Montrer que pour tout x réel positif, on a : $F(x) \geq \text{Log}(2x+1)$.

En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

b) Montrer que F est impaire et calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$.

2. Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \ln\left(2x + \sqrt{1+4x^2}\right)$.

a) Montrer que pour tout x réel, on a G(x) = F (x).

b) Montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3. Calculer $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{3x+5}{\sqrt{1+4x^2}}dx$.

Fonction logarithme népérien

Problème -

A - Soit f la fonction définie sur]0 ; $+\infty$[par $f(x) = x - 4 + \frac{1}{4}\ln x$.

1. Etudier les variations de f .

2. Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une seule solution *a* et encadrer *a* par deux entiers consécutifs.

3. Déterminer le signe de f(x) sur :]0 ; $+\infty$ [.

B - Soit g la fonction définie sur]0 ; $+\infty$ [par : $g(x) = 4 - \frac{1}{4}\ln x$.

1. Etudier les variations de g et montrer que $g([3,4]) \subset [3,4]$.

2. On considère alors la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.

   a) Montrer que, pour tout *n* entier naturel : $3 \leq u_n \leq 4$.

   b) Montrer que *a* est l'unique solution de l'équation g(x) = *x*.

   c) Montrer que $u_n - a$ et $u_{n+1} - a$ sont de signes contraires.

3. a) Montrer que, pour tout $x \in [3 ; 4]$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{12}$.

   b) En déduire que : pour tout *n* de $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{12}|u_n - a|$ puis que $|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n$.

   c) Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que $\left(\frac{1}{12}\right)^n \leq 10^{-2}$; en déduire une valeur approchée de *a* à 10^{-2} près.

C - 1.En déduire la primitive h sur]0 ; $+\infty$ [de f qui s'annule en 1.

2. Etudier les limites de h aux bornes de son ensemble de définition.

3. Etudier les variations de h en utilisant les résultats de la question A- 3.

4. Montrer que $h(a) = \frac{15 - a - 2a^2}{4}$.

5. En déduire une valeur approchée de l'extremum de h en utilisant la question B-3

6. Tracer dans le même repère orthonormé les courbes de f et de h.

Fonction logarithme népérien Corrigé

Exercice 1 :

Pour tout entier n, $n \geq 2$, $u_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \ln\left(\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\right) = \ln\left(\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$.

Or $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\ldots\times\frac{n-2}{n-1}\times\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$

Et $\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right) = \frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\ldots\times\frac{n}{n-1}\times\frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2}$

Donc $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}\times\frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$.

Il en résulte : $u_n = \ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)$.

On en déduit que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$.

Exercice 2 :

a) On a :

pour tout x > 1, $\frac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow 1+\frac{1}{x} < 2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} < 2$.

D'où $\frac{x^2+x}{x^2} \leq 2$ et comme pour tout x > 1 , ln x > 0 alors $\frac{x^2+x}{x^2}\ln x \leq 2\ln x$.

pour tout x >1, $2 < x+1 \Rightarrow 2 < \frac{x^2+x}{x}$ donc $2\ln x \leq \left(\frac{x^2+x}{x}\right)\ln x$.

Ainsi, pour tout x >1, $\left(\frac{x^2+x}{x^2}\right)\ln x \leq 2\ln x \leq \left(\frac{x^2+x}{x}\right)\ln x \Leftrightarrow \frac{\ln}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x^2}$.

b) En remarquant que, pour tout x > 0 , on a : $\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x}.\ln x = \ln'(x).\ln x$, on

obtient : $\int_2^4 \frac{\ln x}{x}dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_2^4 = \frac{(\ln 4)^2-(\ln 2)^2}{2} = \frac{4(\ln 2)^2-(\ln 2)^2}{2} = \frac{3}{2}(\ln 2)^2$.

Pour calculer J, posons : $u(x) = \ln x$ $\quad u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = \frac{1}{x^2}$ $\quad v(x) = -\frac{1}{x}$

Fonction logarithme népérien Corrigé

Nous obtenons : $J=\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_2^4+\int_2^4\frac{dx}{x^2}=-\frac{\ln 4}{x}+\frac{\ln 2}{2}+\left[-\frac{1}{x}\right]_2^4=\frac{1}{4}$.

c) Pour tout x de $[2,4]$, $f(x)>0$ alors $A=\int_2^4 f(x)dx$.

Or pour tout x de $[2,4]$, $\frac{\ln}{x^2}\le f(x)\le\frac{\ln x}{x^2}$ donc

$\int_2^4\frac{\ln}{x^2}dx\le\int_2^4 f(x)dx\le\int_2^4\frac{\ln x}{x^2}\Leftrightarrow J\le A\le I\Leftrightarrow\frac{1}{4}\le A\le\frac{3}{2}(\ln 2)^2$.

Exercice 3:

1.a) $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=-\infty$.

g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a pour tout $x>0$, $g'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}$.

$g'(x)$ est du signe de $1-2\ln x$.

Or $g'(x)=0\Leftrightarrow\ln x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\sqrt{e}$ et $g'(x)>0\Leftrightarrow\ln x<\frac{1}{2}\Leftrightarrow x<\sqrt{e}$ d'où le tableau de variations de g :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

b) Comme $\frac{1}{2e}<2$ alors g est strictement décroissante sur $[2,+\infty[$.

Pour tout x de $]a,b[$ tel que $a>2$, on a : $g(b)\le g(x)\le g(a)$

donc $\int_a^b g(b)dx\le\int_a^b g(x)dx\le\int_a^b g(a)dx\Leftrightarrow(b-a)g(b)\le\int_a^b g(x)dx\le(b-a)g(a)$.

Fonction logarithme népérien Corrigé

c) Pour tout entier naturel n non nul, posons a = n et b = n + 1. En utilisant les inégalités précédentes, nous obtenons :

$$g(n+1) \leq \int_n^{n+1} g(x)dx \leq g(n) \Leftrightarrow \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} g(x)dx \leq \frac{\ln n}{n^2}$$

2. a) Pour tout $n \geqslant 2$, on a :

$$\frac{\ln 3}{3^2} \leq \int_2^3 g(x)dx \leq \frac{\ln 2}{2^2}$$

$$\frac{\ln 4}{4^2} \leq \int_3^4 g(x)dx \leq \frac{\ln 3}{3^2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\ln n}{n^2} \leq \int_{n-1}^{n} g(x)dx \leq \frac{\ln(-1)}{(n-1)^2}$$

D'où par sommation de ces (n- 2) inégalités, nous obtenons :

$$\frac{\ln 3}{3^2} + \frac{\ln 4}{4^2} + \ldots + \frac{\ln n}{n^2} \leq \int_2^3 g(x)dx + \int_3^4 g(x)dx + \ldots + \int_{n-1}^{n} g(x)dx \leq \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} + \ldots + \frac{\ln(n-1)}{(n-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad S_n - \frac{\ln 2}{2^2} \leq \int_2^n g(x)dx \leq S_n - \frac{\ln n}{n^2}$$

b) En utilisant une intégration par parties, nous pouvons écrire :

$$\int_2^n g(x)dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_2^n + \int_2^n \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln n}{n} + \frac{\ln 2}{2} - \left[\frac{1}{x}\right]_2^n = \frac{1+\ln 2}{2} - \frac{1+\ln n}{n^2}$$

D'où : $S_n - \frac{\ln 2}{2^2} \leq \int_2^n g(x)dx \leq S_n - \frac{\ln n}{n^2}$ donne

$$S_n - \frac{\ln n}{n^2} \geq \frac{1+\ln 2}{2} - \frac{1+\ln n}{n^2} \Leftrightarrow S_n \geq \frac{1+\ln 2}{2} - \frac{n+(n-1)\ln n}{n^2}$$

Et $S_n - \frac{\ln 2}{2^2} \leq \frac{1+\ln 2}{2} - \frac{1+\ln n}{n} \Leftrightarrow S_n \leq \frac{2+3\ln 2}{4} - \frac{1+\ln n}{n}$

Ainsi, nous obtenons :

$$\frac{1+\ln 2}{2} - \frac{n+(n-1)\ln n}{n^2} \leq S_n \leq \frac{2+3\ln 2}{4} - \frac{1+\ln n}{n}$$

Fonction logarithme népérien Corrigé

c) Pour n = 100, $\frac{1+\ln 2}{2}-\frac{100+99.\ln 100}{100^2}\leq S_{100}\leq\frac{2+3\ln 2}{4}-\frac{1+\ln 100}{100}$

soit , en arrondissant au centième près : $0,79\leq S_{100}\leq 0,96$.

Exercice 4

1.a) Pour tout x positif, $F(x)-\ln(2x+1)=\int_0^x f(t)dt-\int_{\frac{1}{2}}^x\frac{2}{2t+1}dt=\int_0^x\left(f(t)-\frac{2}{2t+1}\right)dt$.

Or $f(t)-\frac{2}{2t+1}=\frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}-\frac{2}{2t+1}=\frac{4t+2-2\sqrt{1+4t^2}}{(2t+1)\sqrt{1+4t^2}}$

$$=2\frac{(2t+1)^2-(1+4t^2)}{(2t+1)\sqrt{1+4t^2}\,(2t+1+\sqrt{1+4t^2})}=\frac{8t}{(2t+1)\sqrt{1+4t^2}\,\left(2t+1+\sqrt{1+4t^2}\right)}\geq 0$$

Donc, pour tout x de $[0,+\infty[$, $\int_0^x\left(f(t)-\frac{2}{2t+1}\right)dt\geq 0\Leftrightarrow F(x)\geq\ln(2x+1)$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(2x+1)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$

b) On sait que F est la primitive de f sur IR qui s'annule en 0donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $F'(x)=f(x)$.

Posons pour tout x réel, $\varphi(x)=F(x)+F(-x)$.

F et $x\mapsto F(-x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, on a : $\varphi'(x)=F'(x)-F'(-x)=f(x)-f(-x)=0$ car f est une fonction paire.

Il en résulte que la fonction φ est constante sur $\mathbb{R}$ et par suite pour tout x réel, $\varphi(x)=\varphi(0)=2F(0)=0$.

Ainsi, pour tout x réel, $F(x)+F(-x)=0$ d'où encore F est impaire.

On pose, pour tout $x\geq 0$, x = -t : on obtient $F(-t)\geq\ln(-2t+1)$,

d'où $-F(t)\geq\ln(-2t+1)$ donc $F(t)\leq-\ln(-2t+1)$.

Fonction logarithme népérien Corrigé

Donc si x tend vers $+\infty$ alors t tend vers $-\infty$ et on a :

$\lim\limits_{x\to-\infty} F(t) \leq \lim\limits_{x\to-\infty} -\ln(-2t+1)$ et comme $\lim\limits_{x\to-\infty} -\ln(-2t+1) = -\infty$

alors $\lim\limits_{x\to-\infty} F(t) = -\infty$

2. a) Soit $G'(x) = \dfrac{2+\dfrac{8x}{2\sqrt{1+4x^2}}}{2x+\sqrt{1+4x^2}} = \dfrac{\dfrac{2\sqrt{1+4x^2}+4x}{\sqrt{1+4x^2}}}{2x+\sqrt{1+4x^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1+4x^2}} = f(x)$.

donc $G'(x) = f(x)$ donc G est une primitive de f sur IR

Or $G(0) = 0$ et comme la primitive de f qui s'annule en 0 est l'unique fonction F

donc pour tout x réel , $F(x) = G(x) = \ln\left(2x+\sqrt{1+4x^2}\right)$.

b) On sait que pour tout x réel, $F'(x) = f(x) > 0$. Donc F est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans

$F(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} F(x), \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)\right[=]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$.

3. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{3x+5}{\sqrt{1+4x^2}}dx = \frac{3}{4}\int_0^{\sqrt{2}} \frac{4x}{\sqrt{1+4x^2}}dx + \frac{5}{2}\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2dx}{\sqrt{1+4x^2}} = \frac{3}{4}\left[\sqrt{1+4x^2}\right]_0^{\sqrt{2}} + \frac{5}{2}\left[F(x)\right]_0^{\sqrt{2}}$

$$= \frac{3}{2} - \frac{5}{2}\ln\left(2\sqrt{2}+3\right) = \frac{3}{2} - 5\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

Problème

A - Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x - 4 + \frac{1}{4}\ln x$.

1. La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$, comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle et l'on a $f'(x) = 1+\dfrac{1}{4x}$.

donc la fonction f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x - 4 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{4}\ln x = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to0^+} x - 4 = - 4$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{4}\ln x = -\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$.

La droite d'équation *x* = 0 (autrement dit l'axe des ordonnées) est donc asymptote verticale.

On peut résumer dans le tableau de variations suivant :

x	0	a	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

2. La fonction f étant définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ et à dérivée strictement positive, réalise donc une bijection de $]0,+\infty[$ sur l'intervalle-image $\mathbb{R}$.

0 appartenant à l'intervalle-image a donc un antécédent unique par la onction f, autrement dit, l'équation f(x) = 0 admet une seule solution a dans $]0,+\infty[$.

Le principe de localisation permet d'encadrer *a* par deux entiers consécutifs :

$f(4) = \frac{1}{4}\ln 4 > 0$. Comme $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$, la solution *a* est entre 0 et 4.

$f(2) = 2 - 4 + \frac{1}{4}\ln 2 = - 2 + \frac{1}{4}\ln 2 \approx - 1{,}8 < 0$. Comme f(4) > 0, la solution a est entre 2 et 4.

$f(3) = 3 - 4 + \frac{1}{4}\ln 3 = - 1 + \frac{1}{4}\ln 3 \approx - 0{,}7 < 0$. Comme f(4) > 0, la solution a est entre 3 et 4.

Donc, finalement on a : $3 < a < 4$.

3. f étant strictement croissante et puisque f(*a*) = 0, alors :

Fonction logarithme népérien Corrigé

$f(x) < 0$ sur : $]0\,;\,a[$ et $f(x) > 0$ sur $]a,+\infty[$.

B - On se propose de déterminer la valeur de a à 10^{-2} près.

1. Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = 4 - \frac{1}{4}\ln x$.

De même la fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$, comme somme de fonctions (presque) de référence dérivables sur cet intervalle et l'on a $g'(x) = -\frac{1}{4x}$.

Sur $]0,+\infty[$ cette dérivée est strictement négative, donc la fonction g est strictement décroissante.

La fonction g étant définie et dérivable sur $]0,+\infty[$, a fortiori sur [3 ; 4] et à dérivée strictement négative, réalise donc une bijection de [3 ; 4] sur l'intervalle-image [$g(4)$; $g(3)$].

Or $g(4) \approx 3{,}65$ et $g(3) \approx 3{,}72$ donc [$g(4)$; $g(3)$] = g([3 ; 4]) par g est inclus dans l'intervalle [3 ; 4].

2. On considère alors la suite définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.

a) $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = g(u_n)$, donc $u_1 = g(u_0) = g(3) \approx 3{,}72$.

Soit $p(n)$ la propriété : " $3 \leq u_n \leq 4$ ".

Cette propriété est vraie pour 0 , d'après ce qui précède.

<u>Supposons</u> qu'elle soit vraie pour une certaine valeur n, et montrons qu'elle l'est encore pour $n + 1$.

La fonction g étant strictement décroissante sur [3 ; 4], comme $3 \leq u_n \leq 4$, alors on a : $g(4) \leq g(u_n) \leq g(3)$.

Or et cela a été dit ci-dessus, $g(4) \approx 3{,}65$ et $g(3) \approx 3{,}72$.

On a donc $3 \leq g(u_n) \leq 4$.

Donc on a bien $3 \leq u_{n+1} \leq 4$.

Au passage, on a démontré que la suite est bien définie, puisque, pour tout n entier naturel, u_n étant entre 3 et 4, on peut calculer son suivant $u_{n+1} = g(u_n)$.

b) a est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 4 + \frac{1}{4}\ln x = 0$

Fonction logarithme népérien Corrigé

ce qui équivaut encore à $4 - \frac{1}{4}\ln x = x \Leftrightarrow g(x) = x$.

a est donc bien l'unique solution de l'équation $g(x) = x$.

c) La fonction g étant strictement décroissante, pour tout n entier naturel on a :

- si $u_n \geq a$, alors $g(u_n) \leq g(a)$, c'est à dire $u_{n+1} \leq a$.
- si $u_n \leq a$, alors $g(u_n) \geq g(a)$, c'est à dire $u_{n+1} \geq a$.

Donc $u_n - a$ et $u_{n+1} - a$ sont de signes contraires.

3\. a) Pour tout x de $[3 ; 4]$, $|g'(x)| = \frac{1}{4x}$. (On peut ôter les barres de valeur absolue puisque cette quantité est manifestement positive dans l'intervalle considéré).

La fonction inverse et donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{4x}$ étant strictement décroissante sur $[3 ; 4]$, on a donc que :

si $3 \leq x \leq 4$, alors $\frac{1}{4.4} \leq \frac{1}{4x} \leq \frac{1}{4.3}$, en particulier $|g'(x)| \leq \frac{1}{12}$.

b) Il fallait évidemment penser aux inégalités des accroissements finis :

Sur l'intervalle $[3 ; 4]$, la fonction g est donc définie (évidemment), dérivable et d'autre part $|g'(x)| \leq \frac{1}{12}$, donc, pour tout a et b de $[3 ; 4]$:

$|g(b) - g(a)| \leq \frac{1}{12}|b - a|$ en particulier pour $b = u_n$, et cela pour tout n entier naturel : $|g(u_n) - g(a)| \leq \frac{1}{12}|u_n - a| \Leftrightarrow |u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{12}|u_n - a|$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{12}|u_n - a|$.

Donc, en écrivant toutes ces inégalités : pour tout entier n,

$$|u_1 - a| \leq \frac{1}{12}|u_0 - a|.$$

$$\dots$$

$$|u_{n-1} - a| \leq \frac{1}{12}|u_{n-2} - a|$$

Fonction logarithme népérien Corrigé

$$|u_n - a| \leq \frac{1}{12}\ |u_{n-1} - a|$$

En multipliant entre elles toutes ces inégalités et en simplifiant, il vient donc :

$|u_n - a| \leq \frac{1}{12^n}\ |u_0 - a|$.

Et comme $|u_0 - a| \leq 1$, puisque $a \in [3\ ;\ 4]$, on a bien $|u_n - a| \leq \frac{1}{12^n}$.

c) Pour avoir une valeur approchée de a à 10^{-2} près, il suffit donc que : $\frac{1}{12^n} \leq 10^{-2}$.

Ce qui est vrai dès que $n = 2$.

Par conséquent, u_2 est une valeur approchée de a à 10^{-2} près.

Et $u_2 = g(u_1) = 4 - 0{,}25\ ln\ (4 - 0{,}25 Log\ 3) \approx 3{,}67$. Donc $a \approx 3{,}67$ à 10^{-2} près.

C - On se propose maintenant d'étudier la primitive h de f sur $]0,+\infty[$ qui s'annule pour $x = 1$.

1. Une primitive de $f : x \mapsto x - 4 + \frac{1}{4} ln\ x$ est donc :

$$h_1 : x \mapsto \frac{x^2}{2} - 4x + \frac{1}{4}(x\ lnx - x) + C.$$

$h(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - 4 + \frac{1}{4}(1\ ln\ 1 - 1) + C = 0 \Leftrightarrow C = \frac{15}{4}$.

Donc $h(x) = \frac{x^2}{2} - 4x + \frac{1}{4}(x\ ln\ x - x) + \frac{15}{4} = \frac{x^2}{2} - \frac{17}{4}x + \frac{15}{4} + \frac{1}{4}x\ ln\ x$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2} - \frac{17}{4}x + \frac{15}{4} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{4}x\ln x = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \frac{15}{4}$

3. Par définition, $h'(x) = f(x)$. Comme $f(x) < 0$ sur $]0\ ;\ a[$ et $f(x) > 0$ sur $]a,+\infty[$, d'après la question A 3.,la fonction h est donc strictement décroissante sur $]0\ ;\ a[$ et strictement croissante sur $]a,+\infty[$. Elle présente un minimum en a.

4. Comme $f(a) = 0 \Leftrightarrow a - 4 + \frac{1}{4} ln\ a \Leftrightarrow ln\ a = 16 - 4a$.

Fonction logarithme népérien Corrigé

Donc $h(a) = \frac{a^2}{2} - 4a + \frac{a(16-4a)-a+15}{4} = \frac{15-a-2a^2}{4}$.

5. D'après la question B 3., $a \approx 3{,}67$ à 10^{-2} près, il vient $h(a) \approx -3{,}9$.