Similitudes indirectes

Exercice 1

Le plan orienté dans le sens positif, on considère un carré ABCD direct de centre O. On désigne par r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et h l'homothétie de centre C et de rapport $\sqrt{3}$.

1. a) Prouver que $t \circ r$ est une rotation dont on précisera l'angle.
   b) Déterminer $(t \circ r)(A)$ et $(t \circ r)(B)$. En déduire le centre de $t \circ r$.

2. On note $f = r_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)} \circ h$ où $r_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}$ désigne la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

   a) Montrer que f est une similitude directe dont on précisera le rapport et l'angle.

On note Ω le centre de f

   b) Déterminer f(C).

   c) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $\left(\widehat{\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

   Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CI}\right)$. Construire le point Ω.

3. Soit (Δ) la perpendiculaire à la droite (DC) passant par Ω et g la similitude indirecte de centre Ω, de rapport $\sqrt{3}$ et d'axe (Δ).

   a) Construire C' = g(C).

   b) Prouver que $f \circ g^{-1}$ est un antidéplacement fixant Ω.

   c) Déterminer $\left(f \circ g^{-1}\right)(C')$. En déduire la nature de $f \circ g^{-1}$.

Similitudes indirectes

Exercice 2

Soit ($\mathscr{C}$) un cercle de centre I et passant par A. On considère B le point B tel que IA = IB

et $\left(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et O le milieu du segment [AB]. La demi-droite [OI) coupe le cercle ($\mathscr{C}$)

en un point D.

1. Soit S la similitude directe de centre A et qui envoie I en O.

   Déterminer le rapport et l'angle de S.

2 Soit K le projeté orthogonal de A sur (BD).

   a) Montrer que le triangle ADK est isocèle et rectangle en K.
   b) En déduire que S(D) = K.
   c) Soit J le milieu de [AD], montre que I, J et K sont alignés.

3. Soit σ la similitude indirecte qui envoie J en K et K en A.
   a) Déterminer le rapport de σ.
   b) Soit Ω le centre de σ.
      Caractériser $\sigma \circ \sigma$, déterminer $\sigma \circ \sigma(J)$ et en déduire que Ω = D.
   c) Déterminer l'axe de σ et montrer que σ(I) = H où H est l'orthocentre de ABD.

Similitudes indirectes

Exercice 1

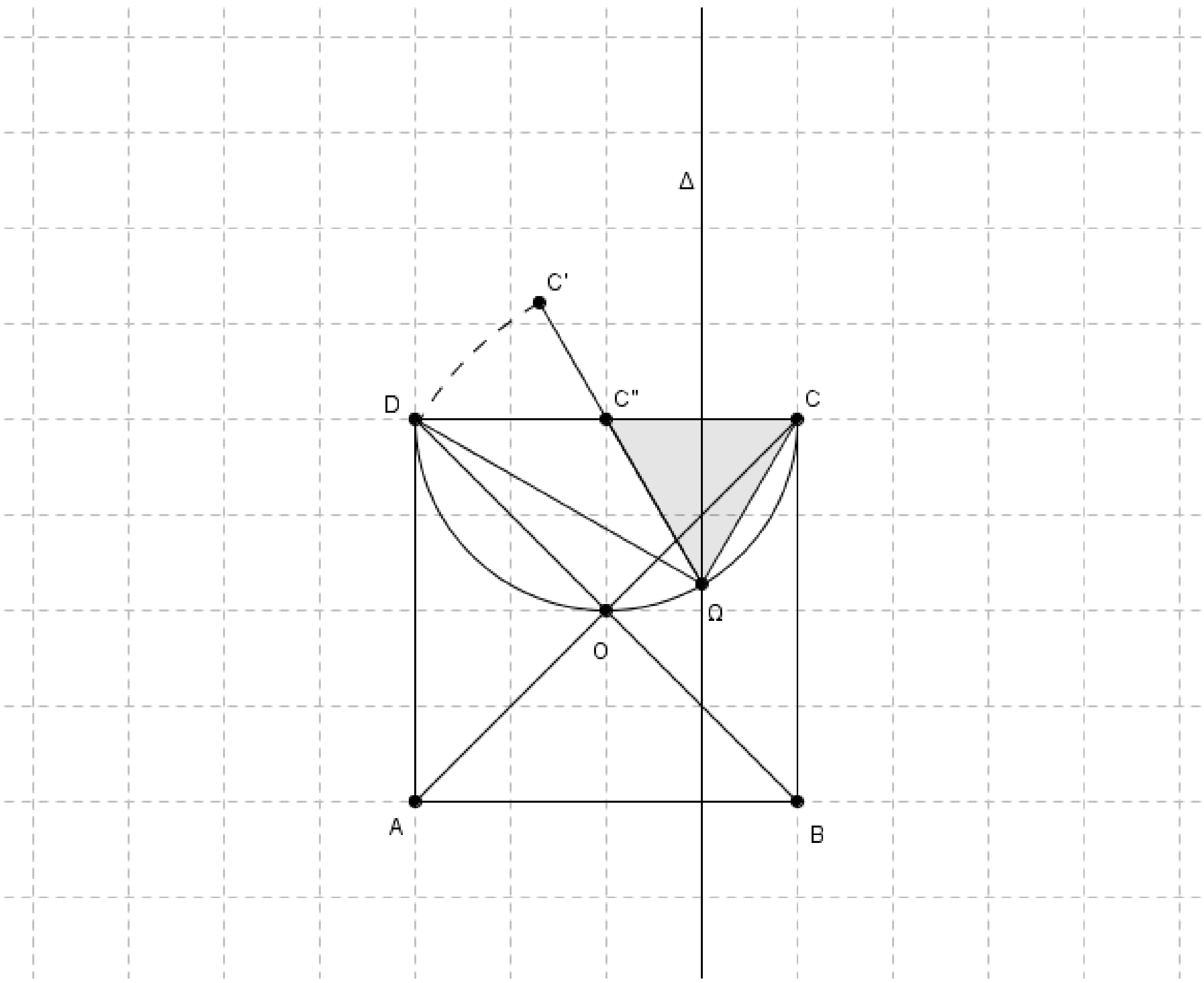
1. a) $t\circ r$ est la composée d'une translation et d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc $t\circ r$ est une rotation de même angle $\frac{\pi}{2}$.

   b) $t\circ r(A)=t(A)=B$ et $t\circ r(B)=t(D)=C$. Les médiatrices des segments [AB] et [BC] se coupent en O donc le centre de la rotation $t\circ r$ est O.

2. a) f est la composée d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et d'un homothétie de rapport $\sqrt{3}$ donc f est une similitude directe de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

   b) f(C) = $f = r_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}\circ h$ (C) = $r_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}(C)=D$.

   c) L'ensemble (Γ) des points tels que $\left(\widehat{\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MD}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ est le demi cercle de diamètre [CD] privé de ses extrémités C et D passant par Ω car $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega D}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.



Similitudes indirectes

Le triangle ΩCD étant rectangle en Ω et $\Omega D = \sqrt{3}\,\Omega C$, par conséquent :

$\tan\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{C\Omega}}\right) = \dfrac{\Omega D}{\Omega C} = \sqrt{3}$ et comme l'angle $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{C\Omega}\right)$ est direct alors $\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{C\Omega}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

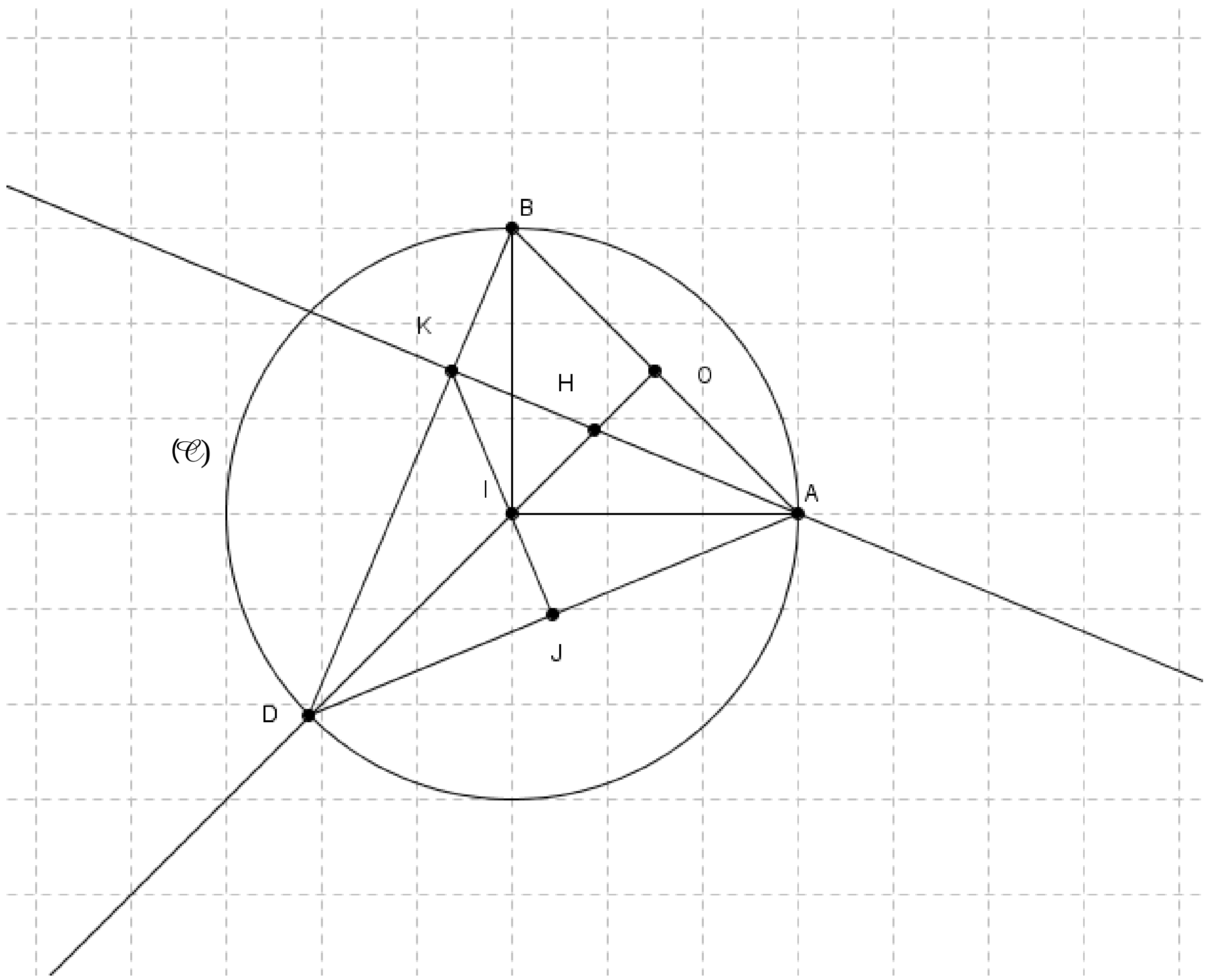
3. a) On a : $\Omega C' = \Omega C\sqrt{3} = \Omega D$.

Si l'on désigne par $C'' = S_{\Delta}(C)$ alors $\overrightarrow{\Omega C'} = \sqrt{3}\,\overrightarrow{\Omega C''}$.

b) f est une similitude directe de centre Ω et rapport $\sqrt{3}$ et g^{-1} est une similitude indirecte de centre Ω et de rapport l'inverse de celui de f donc $f \circ g^{-1}$ est une similitude indirecte de rapport 1 et fixant Ω d'où $f \circ g^{-1}$ est un antidéplacement fixant Ω.

c) $f \circ g^{-1}$ (C') = f(C) = D. Il en résulte que $f \circ g^{-1}$ est la symétrie orthogonale d'axe la médiatrice de [C'D](qui passe évidemment par Ω).

Exercice 2



Similitudes indirectes

1. Le rapport de la similitude directe S est $\frac{AO}{AI}=\frac{\frac{1}{2}AB}{AI}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}AI}{AI}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D'autre part, $\left(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AO}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB}}\right)[2\pi]\Leftrightarrow\left(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AO}}\right)\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$ donc l'angle de S est $-\frac{\pi}{4}$.

2. a) Le triangle AKD est rectangle en K et K appartient au segment [DB].

Comme $\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DK}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}\right)[2\pi]$ donc $\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DK}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\left(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IK}}\right)[2\pi]$

d'où $\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DK}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Par suite, AKD est un triangle isocèle et rectangle en K.

b) On sait que AKD est un triangle isocèle, rectangle en K et direct, il en résulte que :

$AK=\frac{\sqrt{2}}{2}AD$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AK}}\right)\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$ d'où $S(D)=K$.

c) On a : d'une part AKD est un triangle isocèle et rectangle en K et d'autre part J milieu de [AD] donc (KJ) est la médiatrice du segment [AD].

On a aussi : I est centre du cercle (C) , A et D sont deux points de (C) donc IA = ID ou encore I est un point de la médiatrice (KJ) de [AD].

Ainsi, les points I, J et K sont alignés.

3. a) AKD est un triangle isocèle et rectangle en K et J milieu de [AD] donc le triangle AJK est isocèle et rectangle en J ; il en résulte que le rapport de la similitude indirecte σ est $\frac{KA}{JK}=\sqrt{2}$.

b) σ est la similitude indirecte de centre Ω et de rapport $\sqrt{2}$ donc $\sigma\circ\sigma$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$.

$\sigma\circ\sigma(J)=\sigma(\sigma(J))=\sigma(K)=A$.

On en déduit que $h_{(\Omega,2)}(J)=A\Leftrightarrow\overrightarrow{\Omega A}=2\overrightarrow{\Omega J}$. Or $\overrightarrow{DA}=2\overrightarrow{DJ}$, car J est milieu de [AD] donc $\Omega=D$.

Similitudes indirectes

c) Ω , K et $\sigma(K) = A$ ne sont pas alignés donc l'axe de σ est la bissectrice intérieure de l'angle $(\Omega K, \Omega D) = (\Omega A, \Omega D)$ et comme (DO) est la médiatrice du segment [AB] alors (DO) est la bissectrice intérieure de $(\Omega K, \Omega D) = (\Omega A, \Omega D)$. Par suite, l'axe de σ est (DO).

On a : $\sigma((DO)) = (DO)$, $\sigma((KJ)) = (AK)$ et $\{I\} = (DO) \cap (KJ)$

Donc $\{S(I)\} = S((DO)) \cap S((KJ)) = (DO) \cap (KA) = \{H\}$ où H est l'orthocentre du triangle ABD. Ainsi, S(I) = H.