Exercice 1: (4 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. Soit $f(x) = x\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$. La limite de f en $+\infty$ est :

   a) $+\infty$; b) 2 ; c) 0.

2. La suite de terme $u_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ avec n > 0 est :

   a) Croissante ; b) décroissante ; c) non monotone.

3. Si 25×6^n possède 48 diviseur entiers naturels alors n =

   a) 1 ; b) 2 ; c) 3

4. On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé, les points A , B , C et D d'affixes respectives $a = 1-i$, $b = 1+3i$, $c = 4+6i$ et $d = -2i$. L'écriture complexe de la similitude indirecte qui envoie A sur C et B sur D est :

   a) $z' = (2-i)\bar{z}+1+5i$; b) $z' = (-3+2i)\bar{z}+1+i$; c) $z' = (1+3i)\bar{z}-2i$

Exercice 2: (5 points)

On pose pour tout entier naturel n, $S_n = 2^n + 5^n + 7^n$.

1. a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul , S_n est divisible par 2.

   b) Etudier le cas n = 0.

   c) En déduire qu'il existe un unique entier naturel n tel que soit S_n un nombre premier.

2. Reproduire et compléter le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6
Reste de la division de 2^n par 9						
Reste de la division de 5^n par 9						
Reste de la division de 7^n par 9						

3. Montrer que 9 divise $S_{n+6} - S_n$.

4. Soit le reste de la division euclidienne de n par 6. Démontrer que $S_n \equiv S_r \pmod 9$.

Exercice 3: (5 points)

Soit ABD un triangle équilatéral tel que AB= 2 et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$. On note O le milieu de [BD].

1. Montrer qu'il existe une unique similitude directe S qui transforme O ne D et D en A.
2. Déterminer le rapport et un angle de S.
3. a) Soit A' l'image du point A par S. Déterminer la nature du triangle DAA' et en déduire que A' est le symétrique de A par rapport à B.

   b) Soit G le centre de gravité du triangle AOD et G' = S(G). Montrer que $\overrightarrow{G'B}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DO}$.

4. On rapporte le plan au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OD}$.

Déterminer l'écriture complexe de S et en déduire l'affixe de centre Ω.

Exercice 4 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2+\cos x}}$. On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan.

1. Pour tout x de $]-\pi,\pi[$, on pose $F(x)=\int_0^x\frac{dt}{2+\cos t}$ et $G(x)=\int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\frac{2}{3+t^2}dt$.

   a) Vérifier le volume de révolution engendré par rotation de (C) autour de l'axe des abscisses est $V=\pi F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

   b) Montrer que G est dérivable sur $]-\pi,\pi[$ et calculer G'(x).

   c) En déduire que pour tout x de $]-\pi,\pi[$, G(x) = F(x).

2. On pose pour tout x réel, $H(x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}$.

   a) Montrer que pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $H(\tan x)=x$.

   b) Montrer que pour tout x de $]-\pi,\pi[$, $G(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}H\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$.

   c) Calculer V.

CORRIGE

Exercice 1 :

1. b ; 2. a ; 3. c ; 4. a

Exercice 2 :

On pose pour tout entier naturel n, $S_n = 2^n + 5^n + 7^n$.

1. a) On a : $2^n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$, $5 \equiv 1(\mathrm{mod}\, 2) \Rightarrow 5^n \equiv 1(\mathrm{mod}\, 2)$ et $7 \equiv 1(\mathrm{mod}\, 2) \Rightarrow 7^n \equiv 1(\mathrm{mod}\, 2)$

   Donc $S_n \equiv 0+1+1(\mathrm{mod}\, 2)$ d'où $S_n \equiv 0(\mathrm{mod}\, 2)$.

   Donc , pour tout entier naturel n non nul , S_n est divisible par 2.

b) Pour n = 0, $S_0 = 3$ est premier.

c) Il existe un unique entier naturel n = 0 tel que S_n soit un nombre premier $(S_0 = 3)$.

2.

n	1	2	3	4	5	6
Reste de la division de 2^n par 9	**2**	**4**	**8**	**7**	**5**	**1**
Reste de la division de 5^n par 9	**5**	**7**	**8**	**4**	**2**	**1**
Reste de la division de 7^n par 9	**7**	**4**	**1**	**7**	**4**	**1**

3. On a : $S_{n+6} - S_n = 2^n(2^6-1)+5^n(5^6-1)+7^n(7^6-1)$.

Or $2^6 \equiv 1(\mathrm{mod}\, 9)$, $5^6 \equiv 1(\mathrm{mod}\, 9)$ et $7^6 \equiv 1(\mathrm{mod}\, 9)$

Donc $2^6 - 1 \equiv 0(\mathrm{mod}\, 9)$, $5^6 - 1 \equiv 0(\mathrm{mod}\, 9)$ et $7^6 - 1 \equiv 0(\mathrm{mod}\, 9)$.

D'où $S_{n+6} - S_n \equiv 0(\mathrm{mod}\, 9)$ ou encore 9 divise $S_{n+6} - S_n$.

4. Il existe un unique couple d'entiers naturels (q, r) tel que n = 6q + r avec $0 \le r < 6$.

On a : $S_n - S_r = 2^r\left(\left(2^6\right)^q - 1\right) + 5^r\left(\left(5^6\right)^q - 1\right) + 7^r\left(\left(7^6\right)^q - 1\right)$.

Comme $\left(2^6\right)^q \equiv 1(\mathrm{mod}\, 9)$, $\left(5^6\right)^q \equiv 1(\mathrm{mod}\, 9)$ et $\left(7^6\right)^q \equiv 1(\mathrm{mod}\, 9)$.

D'où $\left(2^6\right)^q - 1 \equiv 0(\mathrm{mod}\, 9)$, $\left(5^6\right)^q - 1 \equiv 0(\mathrm{mod}\, 9)$ et $\left(7^6\right)^q - 1 \equiv 0(\mathrm{mod}\, 9)$.

Il en résulte : $S_n - S_r \equiv 0(\mathrm{mod}\, 9)$ ou encore $S_n \equiv S_r (\mathrm{mod}\, 9)$.

Exercice 3 :

1. On a : $O \neq D$ et $D \neq A$ donc il existe une unique similitude directe qui transforme O en D et D en A.
2. On a S(O) = D et S(D) = A.

$$\frac{DA}{OD} = \frac{BD}{\frac{1}{2}BD} = 2$$ donc le rapport de S est 2.

$$\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{DA}\right) \equiv \left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DA}\right)[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{DA}\right) \equiv \pi + \left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA}\right)[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{DA}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$$

Donc l'angle de S est $\frac{2\pi}{3}$.

3. a) Soit A' = S'(A) , S((OA)) est la perpendiculaire à la droite (OA) passant par s(O) = D donc (DA') est perpendiculaire à (AD) d'où le triangle DAA' est rectangle en D.

Comme $\left(\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{DA}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$ alors $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Or $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$, il en résulte que $A' \in [AB)$.

D'autre part : AA' = 2 AD = 2 AB.

Par suite , B est le milieu du segment [AA'] ou encore A' est le symétrique de A par rapport à B.

b) G est le centre de gravité du triangle AOD et G'= S(G)

donc $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'D} + \overrightarrow{G'A} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'D} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{G'B} + 2\overrightarrow{OD} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{G'B} = 2\overrightarrow{DO} \Leftrightarrow \overrightarrow{G'B} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DO}$.

4. L'écriture complexe de S est : z' = az + b

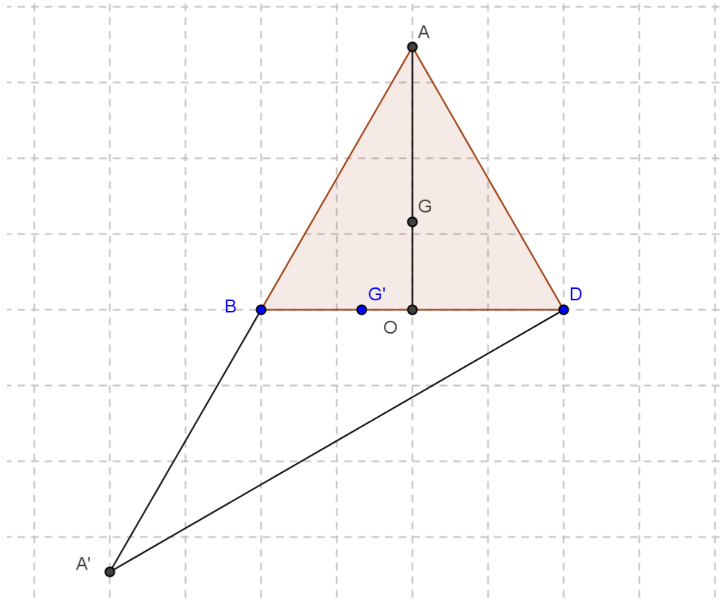
avec $a = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = -1 + i\sqrt{3}$ et $b \in \mathbb{C}$.

Comme S(O) = D alors $b = z_D = 1$.

Ainsi : $z' = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)z + 1$.

L'affixe du centre Ω de S est :

$$z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{1}{2 - i\sqrt{3}} = \frac{2 + i\sqrt{3}}{7} = \frac{2}{7} + i\frac{\sqrt{3}}{7}$$



Exercice 4 :

1. a) f est continue et positive sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc le volume de révolution engendré par rotation autour de l'axe des abscisses est :

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(t)\,dt=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2+\cos t}\,dt.$$

b) - la fonction $x\mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ est dérivable sur $\left]-\pi,\pi\right[$.

- Pour tout x de $\left]-\pi,\pi\right[$, $\frac{x}{2}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \tan\left(\frac{x}{2}\right)\in\mathbb{R}$.

- la fonction $t\mapsto\frac{2}{3+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc G est dérivable sur $\left]-\pi,\pi\right[$ et pour tout x de $\left]-\pi,\pi\right[$,

$$G'(x)=\frac{1}{2}\left[1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right].\frac{2}{3+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{3+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

c) Pour tout x de $\left]-\pi,\pi\right[$,

$$G'(x)=\frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{3+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{2+\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}=\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+1}=\frac{1}{2\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)+1}=\frac{1}{2+\cos x}.$$

Or f est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc F est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

$$F'(x)=f^2(x)=\frac{2}{3+x^2}.$$

Il en résulte : Pour tout $\left]-\pi,\pi\right[$, G'(x) = F'(x).

D'où il existe un réel c tel que pour tout x de $\left]-\pi,\pi\right[$, G(x) = F(x) + c.

Or 0 = F(0) donc c = G(0) = $\int_0^0\frac{2}{3+t^2}\,dt=0$.

Par suite : Pour tout $\left]-\pi,\pi\right[$, G(x) = F(x).

2. a) H est la primitive sur $\mathbb{R}$ de $t\mapsto\frac{1}{1+t^2}$ qui s'annule en 0 donc H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel , $H'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

Posons pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $u(x)=H(\tan x)$.

u est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$,

$$u'(x)=\left(1+\tan^2 x\right)H'(\tan x)=\left(1+\tan^2 x\right).\frac{1}{1+\tan^2 x}=1.$$

D'où , il existe un rée c tel que pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $H(\tan x)=x+c$.

c = H(tan 0) = H(0) = 0.
Ainsi , pour tout x réel , H(tan x) = x.

b) Posons pour tout x de $]-\pi,\pi[$, $v(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}H\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$.

v est dérivable sur $]-\pi,\pi[$ et pour tout x de $]-\pi,\pi[$,

$$v'(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}.\frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right).H'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)=\frac{1}{3}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right).\frac{1}{1+\frac{1}{3}\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{3+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}=f^2(x)=G'(x).$$

D'où il existe un réel c tel que pour tout x de $]-\pi,\pi[$, v(x) = G(x) + c.

Or v(0) = G(0) + c = c et v(0) = 0 donc c = 0 .

Par suite , pour tout de $]-\pi,\pi[$, $G(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\ H\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$.

c) $V=\pi F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi G\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi\frac{2}{\sqrt{3}}H\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{\pi}{4}\right)=\pi\frac{2}{\sqrt{3}}H\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\pi\frac{2}{\sqrt{3}}H\left(\tan\frac{\pi}{6}\right)=\pi\frac{2}{\sqrt{3}}.\frac{\pi}{6}=\frac{\pi^2}{3\sqrt{3}}$.

Ou encore $V=\frac{\pi^2\sqrt{3}}{9}$