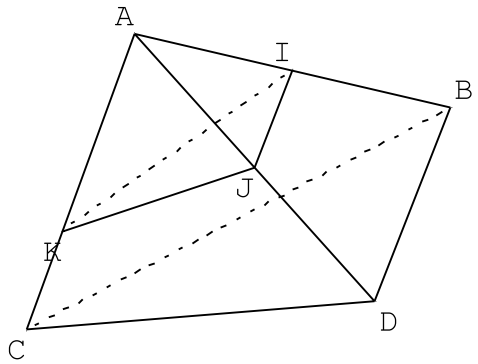
Exercice 1 : (3 points)

Cet exercice se présente comme un questionnaire à choix multiples (QCM).
Les trois questions sont indépendantes.
Pour chaque question, il y a une seule conclusion correcte. Indiquer le numéro et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

$\boxed{1}$ ABCD est un tétraèdre.
I est le milieu de [AB] et J celui de [AD]
K est le point du segment [AC] vérifiant : $AK = \frac{2}{3} AC$

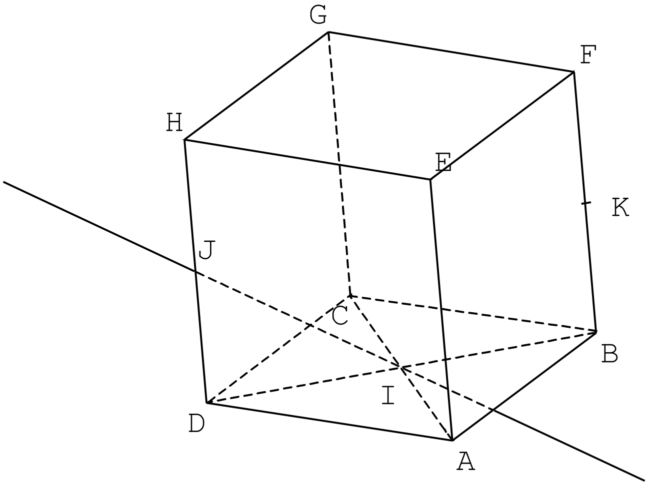


a) Les droites (I J) et (CD) sont sécantes.

b) La droite (I J) coupe le plan (BCD)

c) Les droites (KI) et (CB) sont sécantes.

$\boxed{2}$ ABCDEFGH est un cube.
I est le milieu de [AC], J celui de [DG] et K celui de [BF]

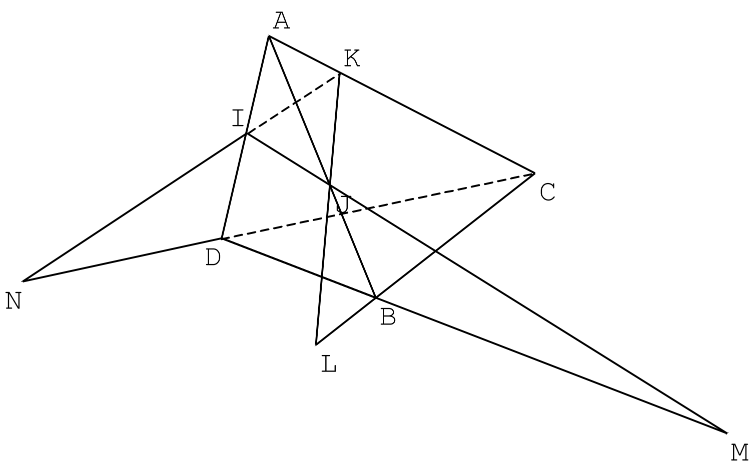


a) Le triangle EGK est rectangle.

b) Le triangle I J K est isocèle

c) La droite (IJ) est parallèle au plan (BCF)

$\boxed{3}$ ABCD est un tétraèdre
I est un point de [AD]
J est un point de [AB]
K un point de [AC]



a) I JK est un triangle équilatéral.

b) La droite (CB) coupe le plan (IJK) en B.

c) Les points L, M et N sont alignés.

Exercice 2 : (6 points)

La capacité vitale est le volume d'air maximal pouvant être mobilisé en une seule inspiration.
Sur un échantillon de 17 personnes, on a mesuré la capacité vitale (en litres). Voici la liste des résultats :

4,15	4,48	5,24	4,8	4,95	4,05	4,3	4,7	5,51	4,58	4,12	5,7	4,85	5,05	4,65	4,7	4,28

1. Déterminer l'étendue E et la moyenne $\overline{C}$ de cette série. Arrondir la moyenne au centilitre près.
2. On décide de regrouper les valeurs de la série par classes.
   a) Compléter le tableau suivant :

capacité vitale (en litres)	[4 ; 4,5[	[4,5 ; 5[	[5 ; 5,5[	[5,5 ; 6[
effectifs				
effectifs cumulés croissants				

   b) Déterminer le premier quartile Q_1 , le troisième quartile Q_3 et la médiane M de cette série.
3. a) Compléter le tableau suivant :

capacité vitale (en litres)	[4 ; 4,5[	[4,5 ; 5[	[5 ; 5,5[	[5,5 ; 6[	Total
Centre des classes c_i					
effectifs n_i					
$n_i.c_i$					
$n_i.c_i^2$					

   b) Déterminer la moyenne $\overline{X}$ puis la variance V arrondi à 10^{-2} près.

Exercice 3 : (6 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{8}{x}$.

On a tracé sa représentation graphique dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé .

Soit les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^2$ et $h(x) = 4x - 4$.

1. Représenter graphiquement les fonctions g et h sur le graphique joint.

On notera $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ les représentations graphique de ces fonctions.

2. a) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}_g$ coupe $\mathscr{C}_h$ en un point A dont on déterminera les coordonnées.

   b) Démontrer (par le calcul) que la courbe $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{C}_h$.

3. a) Démontrer que la courbe pour tout réel non nul x : $f(x) - h(x) = \frac{4(x+1)(2-x)}{x}$

   b) Démontrer que $\mathscr{C}_h$ et $\mathscr{C}_f$ se coupent en deux points dont on déterminera les coordonnées.

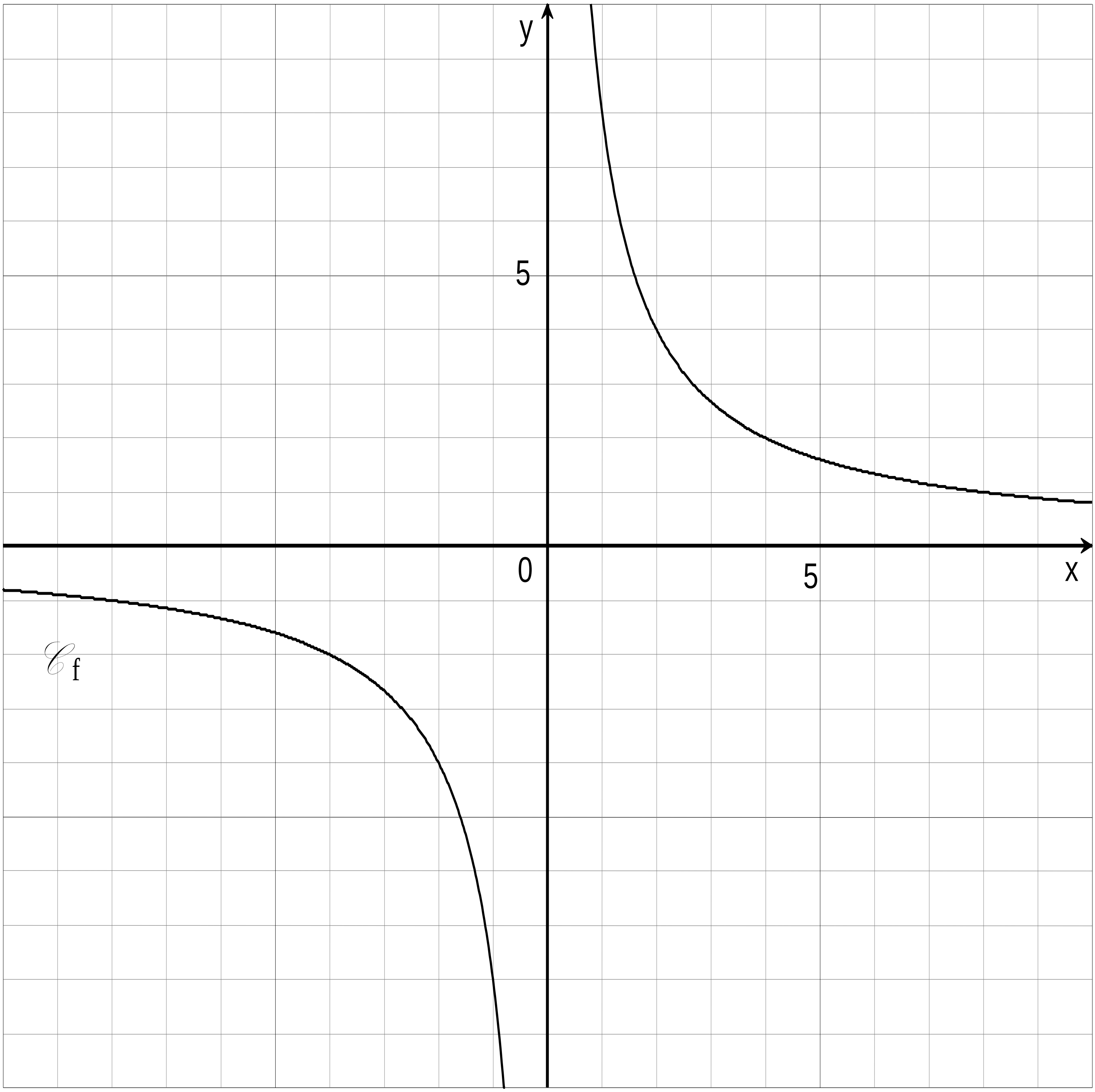
   b) Résoudre l'inéquation : $f(x) < h(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Exercice 4 : (5 points)

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les points A(3, -1) , B(7, 1) et C(4, 2).

1. Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.
2. Vérifier qu'une de la droite (D) parallèle à la droite (AB) et passant par C est : $x - 2y = 0$.
3. Déterminer les coordonnées du centre I et le rayon R du cercle circonscrit ($\mathscr{C}$) au triangle ABC.
4. Montrer que (D) est la tangente au cercle ($\mathscr{C}$) en C.

Nom : …………………………………………………………..



Corrigé

Exercice 1 :

1. c ; 2. b ; 3. c

Exercice 2 :

4,15	**4,48**	**5,24**	**4,8**	**4,95**	**4,05**	**4,3**	**4,7**	**5,51**	**4,58**	**4,12**	**5,7**	**4,85**	**5,05**	**4,65**	**4,7**	**4,28**

1. L'étendue de cette série est : E = 5,7 – 4,05 = 1,65

   la moyenne de cette série est : $\overline{C} = 4{,}71$

2. a)

capacité vitale (en litres)	[4 ; 4,5[	[4,5 ; 5[	[5 ; 5,5[	[5,5 ; 6[
effectifs	6	7	2	2
effectifs cumulés croissants	6	13	15	17

L'effectif total est N = 17 .

b) $\frac{N}{4} = 4{,}25$ **donc Le premier quartile est $Q_1 = 4{,}25$**

$\frac{3N}{4} = 12{,}75$ **donc le troisième quartile est $Q_3 = 4{,}75$.**

$\frac{N+1}{2} = 9$

4,25	**6**
M	**9**
4,75	**13**

$\frac{M-4{,}25}{4{,}75-4{,}25} = \frac{9-6}{13-6}$ **équivaut à** $\frac{M-4{,}25}{0{,}5} = \frac{3}{7}$ **d'où M** $\approx 4{,}46$

3. a)

capacité vitale (en litres)	[4 ; 4,5[	[4,5 ; 5[	[5 ; 5,5[	[5,5 ; 6[	Total
Centre des classes c_i	4,25	4,75	5,25	5,75	
effectifs n_i	6	7	2	2	17
$n_i.c_i$	25,5	33,25	10,5	11,5	80,75
$n_i.c_i^2$	108,375	157,9375	55,125	66,125	387,5625

b) La moyenne de cette nouvelle série est : $\overline{X} = \frac{80{,}75}{17} = 4{,}75$

La variance de cette nouvelle série est : $V = \frac{387{,}5625}{17} - (4{,}75)^2 \approx 0{,}24$.

Exercice 3 :

1° $\mathscr{C}_g$ est une parabole de sommet O et d'axe la droite des ordonnées .

h est affine donc $\mathscr{C}_h$ est la droite passant par les points de coordonnées respectives (0, -4) et (1, 0).

Voir figure.

2° a) $g(x) = h(x)$ équivaut à $x^2 = 4x - 4$ équivaut à $x^2 - 4x + 4 = 0$ équivaut à $(x-2)^2 = 0$ équivaut à $x = 2$.

Donc A(2 , 4).

b) Pour tout x rée, $g(x) - h(x) = (x-2)^2 \geq 0$ donc $\mathscr{C}_g$ est au dessus de $\mathscr{C}_h$.

3° a) $f(x) - h(x) = \frac{8}{x} - (4x - 4) = \frac{8}{x} - 4x + 4 = \frac{8}{x} - \frac{4x^2}{x} + \frac{4x}{x} = \frac{8 - 4x^2 + 4x}{x} = \frac{8x - 4x^2 + 8 - 4x}{x}$

$= \frac{4(2x - x^2 + 2 - x)}{x} = \frac{4(x+1)(2-x)}{x}$.

b) $f(x) = h(x)$ équivaut à $f(x) - h(x) = 0$ équivaut à $\frac{4(x+1)(2-x)}{x} = 0$ équivaut à $x = -1$ ou $x = 2$.

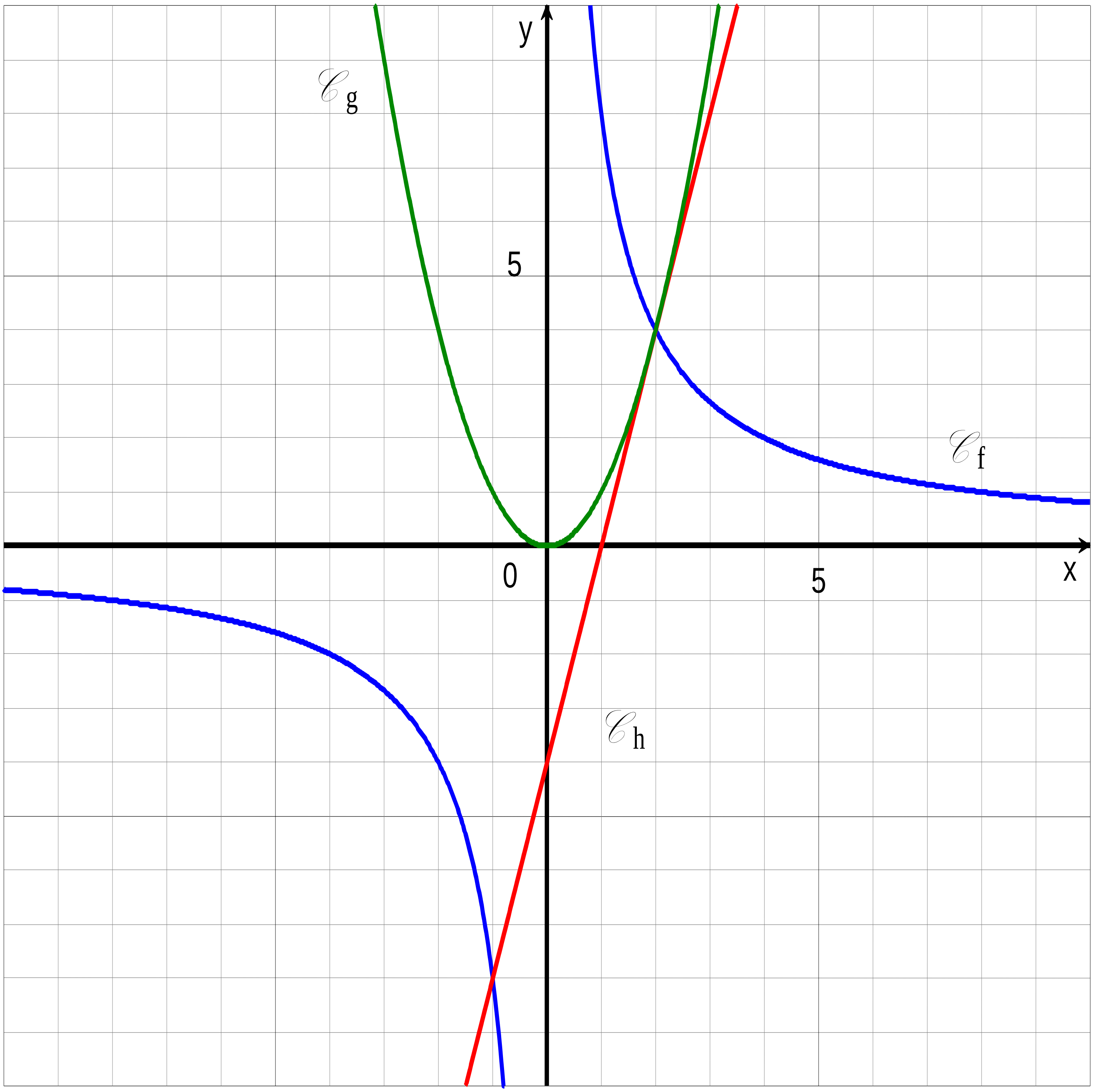
Ainsi $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$ se coupent aux points B(– 1, – 8) car $\frac{8}{-1} = 4 \times (-1) - 4 = -8$ et C (2 , 4) car $\frac{8}{2} = 4 \times 2 - 4 = 4$.

Remarquons que A = C.

c) $f(x) \leq h(x) \Leftrightarrow f(x) - h(x) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4(x+1)(2-x)}{x} \leq 0$

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
x + 1		–	0	+		+		+	
2 – x		+		+		+	0	–	
x		–		–	0	+		+	
		+	0	–	$\|$	+	0	–	

$S = [-1, 0[\cup [2, +\infty[$


y
$\mathscr{C}_g$
5
$\mathscr{C}_f$
0
5
x
$\mathscr{C}_h$

Exercice 4 :

1. On a : $CA=\sqrt{(3-4)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

   Et $CB=\sqrt{(7-4)^2+(1-2)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$ donc CA = CB .

   D'autre part : $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ donc $(-1).3+(-3).(-1)=-3+3=0$ d'où $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$.

   Ainsi , ABC est un triangle isocèle et rectangle en C.

2. Une équation cartésienne de la droite (D) est $x-2y=0$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D).

   Comme $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ d'où $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et par suite (D) est parallèle à (AB).

   Or 4 -2.2 = 4 – 4 = 0 donc C appartient à (D) .

   La droite (D) est donc la parallèle à la droite (AB) passant par C.

3. Comme le triangle ABC est isocèle et rectangle en C alors le centre I du cercle circonscrit ($\mathscr{C}$) au triangle ABC est le milieu du segment [AB] et son rayon est R = IA.

   I(5, 0) et R = $IA=\sqrt{(3-5)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$.

4. $d(I,D)=\frac{|5+2.0|}{\sqrt{1+4}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}=R$ donc (D) est une tangente au cercle ($\mathscr{C}$) et comme C est un point commun à (D) et au cercle ($\mathscr{C}$) alors (D) est la tangente à ($\mathscr{C}$) ne C.