

Devoir de contrôle # 2

Durée : 2 heures

Date : 07/02/2012

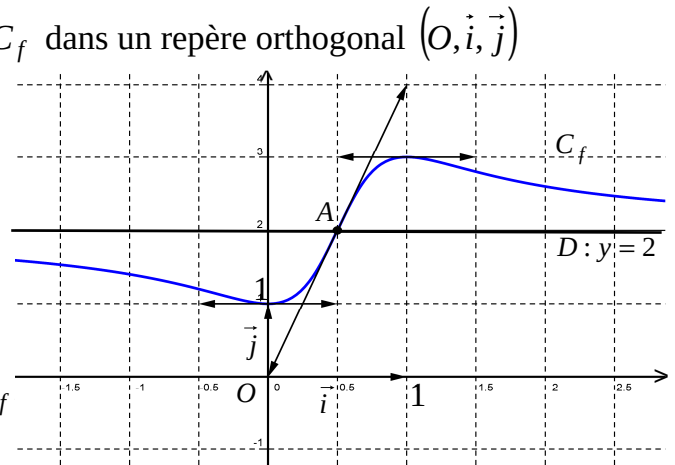
Exercice 1 : (4 points)

Ci-contre est tracée la courbe représentative notée C_f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On sait que :

- La droite D d'équation $y = 2$ est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- La courbe C_f admet deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses.

- $A\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ est un centre de symétrie de la courbe C_f



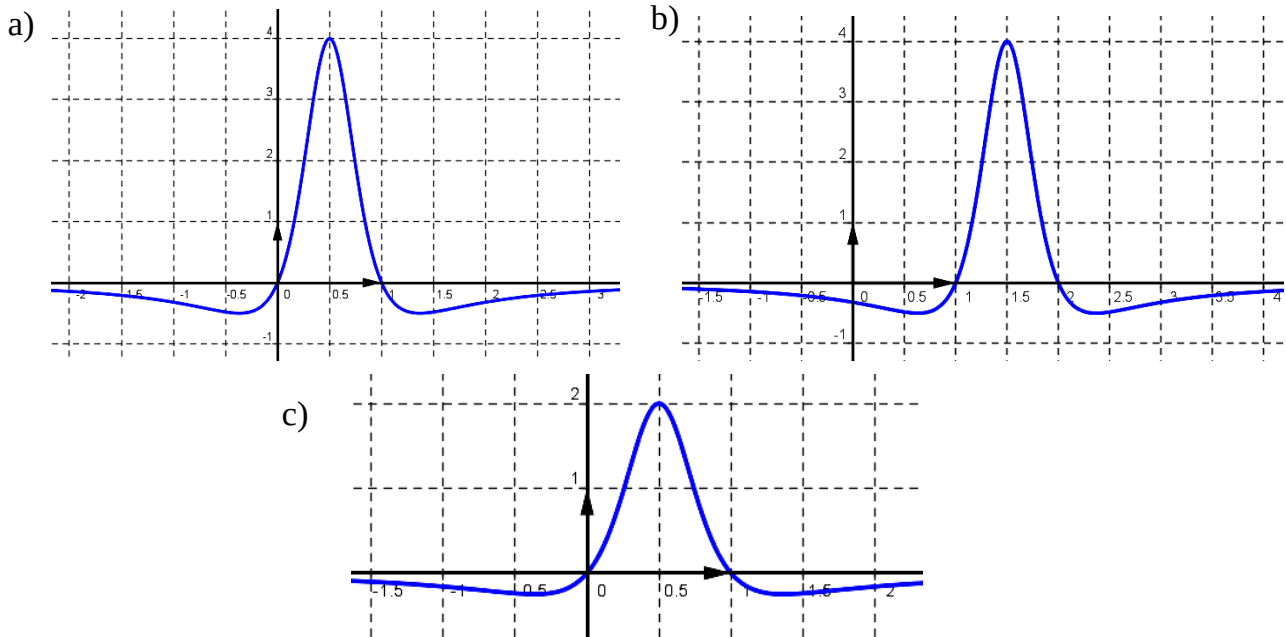
Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.

Indiquer sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

La justification de chaque réponse est demandée.

- $f(-1) + f(2) = 2$
 - $f(-1) + f(2) = 1$
 - $f(-1) + f(2) = 4$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$
 - $f'(2) < 0$
 - $f'\left(\frac{1}{4}\right) < 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 2 = 0$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 2 = +\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

4) La courbe représentative de la fonction f' est :



5) La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$ est dérivable en $\frac{1}{2}$ et :

- $g'\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}$
- $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{2}$
- $g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 4 : (6 points)

On donne ci-dessous un tableau incomplet de variations d'une fonction f donnée par :

$$f(x) = \frac{4x^2 + b}{2x + a} \quad (a \text{ et } b \text{ sont des nombres réels}).$$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-		-	0	+	
$f(x)$			0						

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

- 1) Quel est l'ensemble de définition de f ?
- 2) Vérifier que $a = -1$ et $b = 0$.

Dans ce qui suit on prend $f(x) = \frac{4x^2}{2x-1}$

- 3) a- Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- b- Démontrer que la droite (d) d'équation $y = 2x + 1$ est une asymptote à la courbe (C).
- c- Vérifier que la droite (D) d'équation $x = \frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe (C).

- 4) Montrer que le point $I\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ est un centre de symétrie de (C).

- 5) a- Montrer que $f'(x) = \frac{8x(x-1)}{(2x-1)^2}$ puis dresser le tableau de variations de f .

b- Tracer (D) , (d) et (C).

- 6) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 2$.

- 7) On considère les points $A\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ et $M(3,0)$. La droite (AM) coupe l'axe des ordonnées en un point N.

a) Vérifier qu'une équation de la droite (AM) est $y = -\frac{2}{5}x + \frac{6}{5}$.

b) Déterminer l'ordonnée de N.

c) Vérifier que $OM.ON = \frac{1}{2}f(3)$

Exercice 1 :1. **c.**

En effet :

$A\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ est centre de symétrie de (C) équivaut à pour tout $x \neq \frac{1}{2}$, $1-x \neq \frac{1}{2}$ et $f(1-x) + f(x) = 4$

Prenons $x = 2$.2. **b**

En effet :

f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ donc pour tout $x > 1$, $f'(x) < 0$.

Prenons $x = 2$.3. **a**

La droite (D) d'équation $y = 2$ est asymptote à (C_f) donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 2 = 0$.

4. **c**La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1 \quad \text{et} \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

f est strictement croissante sur $]0, 1[$ donc $f'(x) > 0$, pour tout x de $]0, 1[$.

f est strictement décroissante sur $] -\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ donc $f'(x) < 0$, pour tout x de $] -\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

5. **c**

F est dérivable est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x réel,

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}.$$

$$\text{Donc } g \text{ est dérivable en } \frac{1}{2} \text{ et } g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f'\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{f\left(\frac{1}{2}\right)}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exercice 2 :

1. Remarquons que $A = n^4 + 2n^2 + 1 - n^2 = (n^2 + 1)^2 - n^2 = (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$.

2. a) Nous avons $a = n(n + 1) + 1$ et $b = n(n - 1) + 1$. Or le produit de deux entiers consécutifs est pair donc a et b sont impairs.

b) Soit d un diviseur commun à a et à b .

Si d divise a et b , alors d divise $a + b = 2(n^2 + 1)$ et $a - b = 2n$.

c) Pour tout entier naturel n , $n^2 + 1 = n \times n + 1$ donc $n^2 + 1$ et n sont premiers entre eux.

d) $a \wedge b$ divise $(a+b) \wedge (a-b)$.

$$\text{Comme } (a+b) \wedge (a-b) = [2(n^2+1)] \wedge (2n) = 2[(n^2+1) \wedge n] = 2$$

Alors $a \wedge b$ divise 2.

Or a et b sont impairs donc $a \wedge b = 1$ et par suite a et b sont premiers entre eux.

Exercice 3 :

1. a) On a : $r(B) = O$, $r(I) = J$ et $r(A) = A$ donc $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BA}) \equiv (\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OA}) [2\pi]$.

Les droites (BI) et (OA') sont parallèles et (OB) est une sécante. Les angles $(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BI})$ et

$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA'})$ sont correspondants et directs. Donc $(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BI}) \equiv (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA'}) [2\pi]$.

$$\begin{aligned} \text{b) } (\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OB'}) &\equiv (\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA'}) + (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}) [2\pi] \\ &\equiv (\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BI}) + (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}) [2\pi] \\ &\equiv (\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}) [2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} [2\pi] \\ &\equiv \pi [2\pi] \end{aligned}$$

Donc les points J , O et B' sont alignés.

2. a) On a : $r(B) = O$ et $r(C) = C'$ donc $BC = OC'$ or $BC = OA' = OB'$.

Il en résulte : $OC' = OB'$.

b) C appartient à la droite (BI) donc $r(C) = C'$ appartient à la droite $r((BI)) = (OJ) = (OB')$.

c) On a : $r(B) = O$ et $r(C) = C'$ donc $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OC'}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ d'où $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OC'}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

Or $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$, il en résulte que les vecteurs $\overrightarrow{OC'}$ et $\overrightarrow{OB'}$ sont colinéaires et de même sens.

De plus $OC' = OB'$, on conclue que : $C' = B'$.

Ainsi, $r(C) = B'$.

Comme $r(C) = B'$ alors le triangle ACB' est équilatéral.

Exercice 4 :

1. L'ensemble de définition de f est $\left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$.

2. f n'est pas définie en $\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}$ est une solution de l'équation $2x + a = 0 \Leftrightarrow a = -1$.

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a} = 0 \Leftrightarrow b = 0.$$

3. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$.

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - (2x - 1)(2x + 1)}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x - 1} = 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (2x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - (2x - 1)(2x + 1)}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x - 1} = 0.$$

Donc la droite (d) d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à (C).

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty$ donc la droite (D) d'équation $x = \frac{1}{2}$ est asymptote à (C).

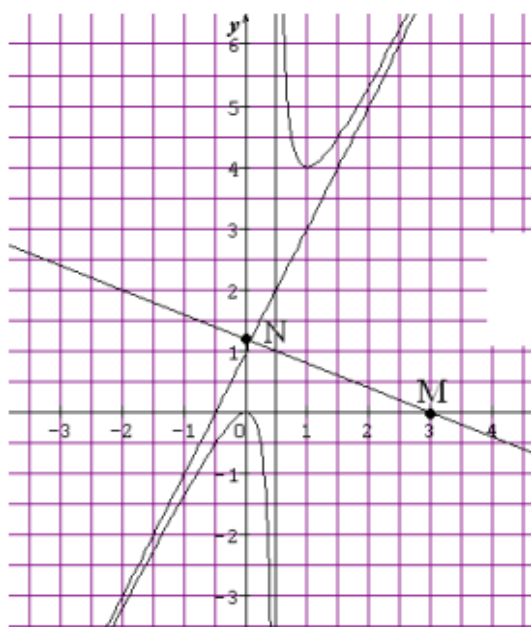
$$4. x \in D_f \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -x \neq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - x \neq \frac{1}{2}$$

$$f(1-x) + f(x) = \frac{4(1-x)^2}{2(1-x)-1} + \frac{4x^2}{2x-1} = \frac{4-8x+4x^2}{1-2x} + \frac{4x^2}{2x-1} = \frac{-4+8x-4x^2}{2x-1} + \frac{4x^2}{2x-1}$$

$$\frac{8x-4}{2x-1} = \frac{4(2x-1)}{2x-1} = 4 \quad \text{donc le point } I\left(\frac{1}{2}, 2\right) \text{ est un centre de symétrie de (C).}$$

$$5. a) \text{ Pour tout } x \neq \frac{1}{2}, f'(x) = \frac{8x(2x-1) - 2 \cdot 4x^2}{(2x-1)^2} = \frac{4x^2 - 8x}{(2x-1)^2} = \frac{4x(x-2)}{(2x-1)^2}.$$

b)



6. $f(x) > 2$ équivaut à (C) est située au dessus de la droite d'équation $y = 2$.

Par suite , l'ensemble de solutions de l'inéquation $f(x) > 2$ est $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$.

7. a) Les coordonnées de A sont $\left(\frac{1}{2}, 1 \right)$ et $-\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{6}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{6}{5} = 1$

Les coordonnées de M sont $(3, 0)$ et $-\frac{2}{5} \cdot 3 + \frac{6}{5} = -\frac{6}{5} + \frac{6}{5} = 0$

Donc les coordonnées de A et celles de B vérifient l'équation $y = -\frac{2}{5}x + \frac{6}{5}$,

donc (AM) : $y = -\frac{2}{5}x + \frac{6}{5}$.

b) La droite (AM) coupe la droite des ordonnées en N d'abscisse 0 et d'ordonnée $\frac{6}{5}$.

D'où $N\left(0, \frac{6}{5}\right)$.

c) $OM = 3$, $ON = \frac{6}{5}$ et $f(3) = \frac{36}{5}$ donc $OM \cdot ON = \frac{1}{2}f(3)$.