

Exercice 1: (4 points)

Répondre, avec justification, par **Vrai** ou **Faux** à chacune des propositions suivantes :

1. La partie imaginaire de $-3+4i^6$ est 4.
2. Pour tout nombre complexe z , $z^2 + 3 = (z - i\sqrt{3})(z + i\sqrt{3})$.
3. Le conjugué du nombre complexe $\frac{3-2i\sqrt{2}}{4i-1}$ est $\frac{4i-1}{3-2i\sqrt{2}}$.

Exercice 2: (5 points)

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par A le point d'affixe $z_A = 4$.

Soit B le point de même abscisse que A et d'ordonnée $\frac{5}{2}$ et C le point de coordonnées $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$. Voir figure à l'annexe ci-joint à la page 3-3.

1. Donner l'écriture cartésienne de chacune des affixes respectives z_B et z_C des points B et C.
2. Soit Γ l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $\left|z - 4 - \frac{5}{2}i\right| = \left|z - 2 + \frac{3}{2}i\right|$.

Vérifier que le point A appartient à Γ puis déterminer et construire Γ .

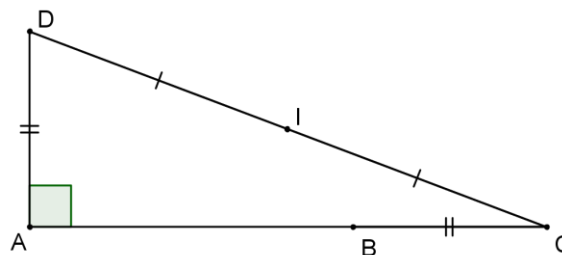
3. Soit Γ' l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $\left|\bar{z} - 4\right| = \frac{5}{2}$.

- a) B et C sont-ils des points de Γ' ?
- b) Déterminer et construire l'ensemble Γ' .

Exercice 3: (5 points)

Dans le plan orienté dans le sens direct, on donne ACD un triangle rectangle tel que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

On désigne par I le milieu de [CD] et B le point du segment [AC] tel que $BC = AD$. Voir figure ci-dessous.



1. Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme A en B et D en C. Donner son angle.
2. Sur l'annexe ci-joint à la page 3/3, construire le centre O de r .
3. a) Placer le point D' symétrique de D par rapport à O.
b) Déterminer $r((DC))$ et $r((OC))$. En déduire $r(C)$.
c) En déduire que $I' = r(I)$ est le milieu du segment $[CD']$. Placer le point I'.

Exercice 4: (6 points)

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. f est la fonction $x \mapsto x^3$.

- Montrer que l'approximation affine de $(2+h)^3$, pour h voisin de 0, est égale à $8+12h$.
- En déduire des approximations des nombres suivants : $(1,997)^3$ et $(2,001)^3$.

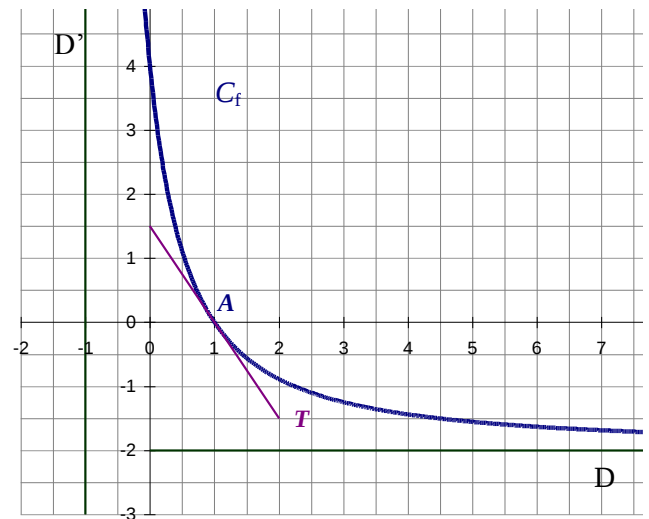
2. Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = (x^2 + x)\sqrt{x}$.

- En revenant à la définition du nombre dérivé, montrer que f est dérivable à droite en 0 et préciser $f'_d(0)$.
- Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et exprimer $f'(x)$ pour $x > 0$.
- Préciser alors l'ensemble des réels x pour lesquels f est dérivable.

3. Dans le plan est muni d'un repère orthonormé, la courbe C_f ci-dessous, représente une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $] -1; +\infty[$. On sait que :

- la droite T est tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse 1 ;
 - la droite D d'équation $y = -2$ est asymptote à la courbe C_f au voisinage $+\infty$.
 - la droite D' d'équation $x = -1$ est asymptote à la courbe C_f .
- À partir du graphique et des renseignements fournis :

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Déterminer $f'(1)$.
- L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?
Pour tout réel $a \geq 1$, $f'(a) \times f(a) \geq 0$
- Dresser le tableau de variation de f .



Annexe à compléter et à rendre avec la copie

Nom de l'élève :

Figure de l'exercice 2

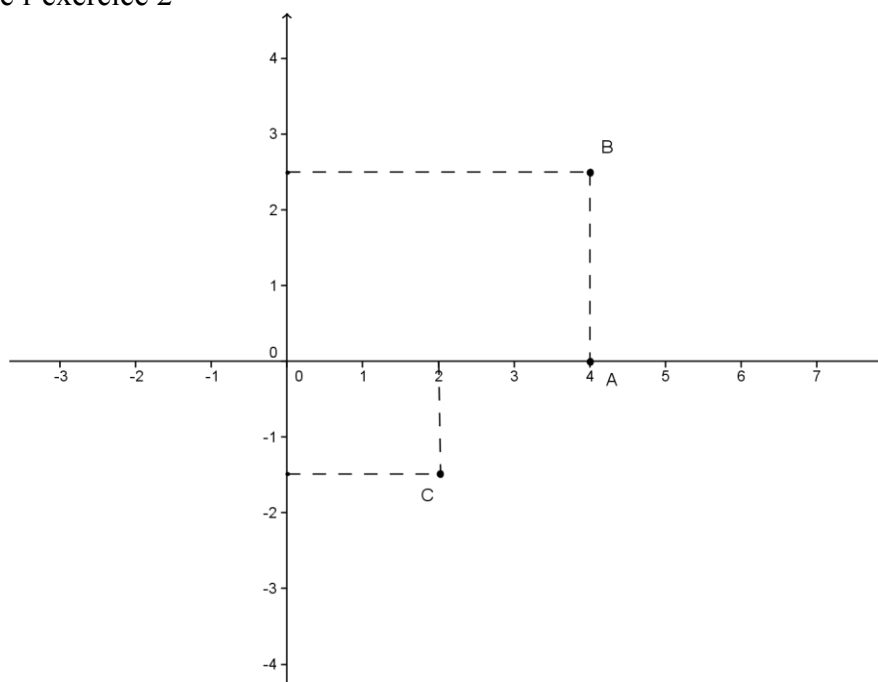
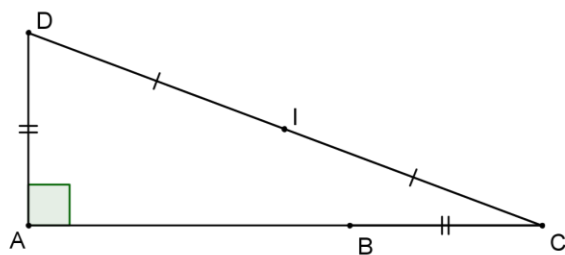


Figure de l'exercice 3



Corrigé

Exercice 1:1. **Faux**

En effet : $-3 + 4i^6 = -3 + 4i^4 \times i^2 = -3 - 4 = -7$ donc la partie imaginaire de $-3 + 4i^6$ est 0.

2. **Vrai**

En effet : pour tout nombre complexe z , $(z - i\sqrt{3})(z + i\sqrt{3}) = z^2 - (i\sqrt{3})^2 = z^2 + 3$.

3. **Vrai**

En effet :

$$\left(\frac{3-2i\sqrt{2}}{4i-1} \right) = \frac{\overline{(3-2i\sqrt{2})}}{\overline{(-1+4i)}} = \frac{3+2i\sqrt{2}}{-1-4i} = \frac{(3+2i\sqrt{2})(3-2i\sqrt{2})(-1+4i)}{(-1-4i)(-1+4i)(3-2i\sqrt{2})} = \frac{17(-1+4i)}{17(3-2i\sqrt{2})} = \frac{-1+4i}{3-2i\sqrt{2}}$$

Exercice 2:

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par A le point d'affixe $z_A = 4$.

Soit B le point de même abscisse que A et d'ordonnée $\frac{5}{2}$ et C le point de coordonnées $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$. Voir figure à l'annexe ci-joint à la page 3-3.

1. Les coordonnées de B sont $\left(4, \frac{5}{2}\right)$ donc $z_B = 4 + \frac{5}{2}i$ et celle de C sont $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$ donc $z_C = 2 - \frac{3}{2}i$.

2. Soit Γ l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $\left|z - 4 - \frac{5}{2}i\right| = \left|z - 2 + \frac{3}{2}i\right|$.

$\left|z_A - 4 - \frac{5}{2}i\right| = \left|4 - 4 - \frac{5}{2}i\right| = \left|-\frac{5}{2}i\right| = \frac{5}{2}$ et $\left|z_A - 2 + \frac{3}{2}i\right| = \left|2 - \frac{3}{2}i\right| = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$ donc le point A appartient à Γ .

$M(z) \in \Gamma \Leftrightarrow \left|z - 4 - \frac{5}{2}i\right| = \left|z - 2 + \frac{3}{2}i\right| \Leftrightarrow |z - z_B| = |z - z_C| \Leftrightarrow BM = CM$ donc Γ est la médiatrice du segment [BC].

3. Soit Γ' l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|\bar{z} - 4| = \frac{5}{2}$.

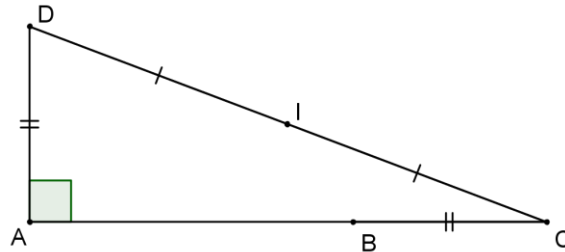
a) $|\bar{z}_B - 4| = \left|4 - \frac{5}{2}i - 4\right| = \left|-\frac{5}{2}i\right| = \frac{5}{2}$ donc $B \in \Gamma'$

$$|\bar{z}_C - 4| = \left|2 + \frac{3}{2}i - 4\right| = \left|-2 + \frac{3}{2}i\right| = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{2} \text{ donc } C \in \Gamma'$$

- b) $M(z) \in \Gamma' \Leftrightarrow |\bar{z}-4| = \frac{5}{2} \Leftrightarrow |\overline{z-4}| = \frac{5}{2} \Leftrightarrow |z-4| = \frac{5}{2} \Leftrightarrow AM = \frac{5}{2}$ donc Γ' est le cercle de centre A et de rayon $\frac{5}{2}$.

Exercice 3:

Dans le plan orienté dans le sens direct, on donne ACD un triangle rectangle tel que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par I le milieu de [CD] et B le point du segment [AC] tel que $BC = AD$. Voir figure ci-dessous.



- On a $AD = BC$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \Rightarrow (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \Rightarrow (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc il existe une unique rotation r qui transforme A en B et D en C d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
- O le centre de r est le point d'intersection des médiatrices des segments [AB] et [DC].
- a) Le point D' est le symétrique de D par rapport à O (voir figure).
 b) r est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ donc $r((DC))$ est la droite perpendiculaire à (DC) passant par $r(D) = C$ donc $r((DC)) = (CD')$ et $r((OC))$ est la droite perpendiculaire à (OC) passant par $r(O) = O$ donc $r((OC)) = (OD')$.
 $\{C\} = (DC) \cap (OC)$ donc $\{r(C)\} = r((DC)) \cap r((OC)) = (CD') \cap (OD') = \{D'\}$.
 En déduire $r(C) = D'$.
 c) I milieu de [DC] donc $I' = r(I)$ est le milieu du segment $r([DC]) = [CD']$.

Exercice 4:

- f est la fonction $x \mapsto x^3$.
 a) L'approximation affine de $(2+h)^3$, pour h voisin de 0, est : $(2+h)^3 = f(2+h) \approx f(2) + f'(2) \cdot h$.
 Or $f(2) = 8$ et $f'(2) = 3 \times 2^2 = 12$ donc $(2+h)^3 \approx 8 + 12h$.
 b) $(1,997)^3 = (2 - 0,003)^3 \approx 8 + 12 \times (-0,003)$ donc $(1,997)^3 \approx 7,964$ et $(2,001)^3$.
 $(2,001)^3 = (2 + 0,001)^3 \approx 8 + 12 \times 0,001$ donc $(2,001)^3 \approx 8,012$.
- Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (x^2 + x)\sqrt{x}$.
 a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^2 + x)\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1)\sqrt{x} = 0$ donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.
 b) $x \mapsto x^2 + x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = (2x+1)\sqrt{x} + (x^2+x) \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2x(2x+1) + (x^2+x)}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 + 3x}{2\sqrt{x}}$.

c) f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et dérivable à droite en 0 donc f est dérivable sur $[0; +\infty[$.

3. Dans le plan est muni d'un repère orthonormé, la courbe C_f ci-dessous, représente une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]-1; +\infty[$. On sait que :

- la droite T est tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse 1 ;
- la droite D d'équation $y = -2$ est asymptote à la courbe C_f au voisinage $+\infty$.
- la droite D' d'équation $x = -1$ est asymptote à la courbe C_f .

À partir du graphique et des renseignements fournis :

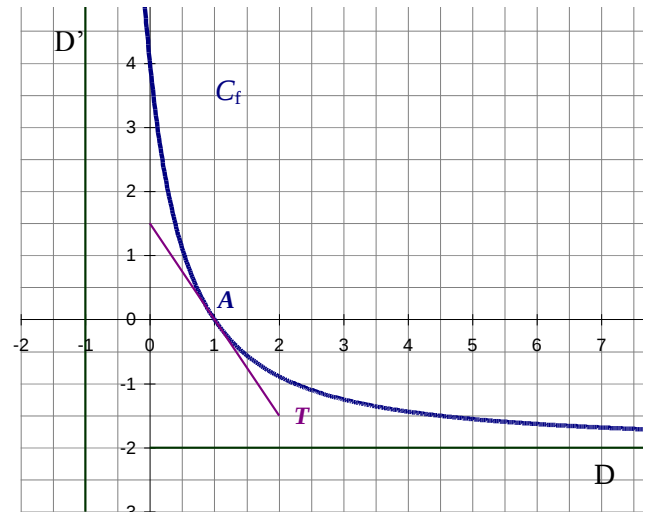
a. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$.

b. $f'(1) = \frac{0 - \frac{3}{2}}{1 - 0} = -\frac{3}{2}$.

Sur l'intervalle $[1, +\infty[$, C_f est située en dessous de l'axe des abscisses donc pour tout $a \geq 1$, $f(a) \leq 0$.

D'autre part, f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ donc pour tout $a \geq 1$, $f'(a) \leq 0$.

Ainsi, pour tout réel $a \geq 1$, $f'(a) \times f(a) \geq 0$



c- Le tableau de variation de f :

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	-2

Figure de l'exercice 2 :

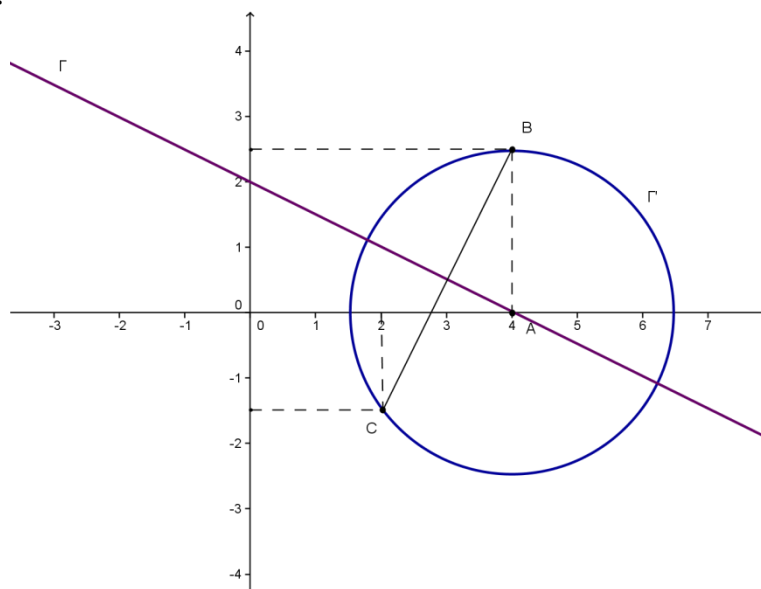


Figure de l'exercice 4 :

