Mathématiques	Bac blanc – 2013		
Lycée IBN KHALDOUN - RADES			
4^e Maths 1	Mai 2013	Durée : 4 heures	Prof : ABIDI Farid

Le sujet comporte 4 pages numérotées 1/4 , 2/4 , 3/4 et 4/4 .

La page 4/4 est à compléter et à rendre.

Exercice 1 : (3 points)

Cet exercice comporte 3 questions. Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle vraie ou fausse. La justification est exigée.

1. Une urne contient 75 boules blanches et 25 boules noires. L'épreuve consiste à tirer une boule. Les boules ont toutes la même probabilité d'être tirées. On effectue n tirages indépendants et avec remise, n désigne un entier supérieur à 10.

Si X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées alors $p(X=0)=\frac{1}{2^{2n}}$.

2. Une maladie atteint 1% d'une population donnée. Un test de dépistage de cette maladie a les caractéristiques suivantes : Chez les individus malades, 99% des tests sont positifs et 1% négatifs ;

chez les individus non malades : 98% des tests sont négatifs et les autres étant positifs.

Un individu est choisi au hasard dans cette population et on lui applique le test.

On note M l'évènement : « l'individu est malade » et T l'évènement : « le test est positif ».

Alors $p(T) = 2,97.10^{-2}$.

3. La durée d'attente en secondes à la caisse d'un supermarché est une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,01.

Alors la densité de probabilité de Y est la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(t) = e^{-0,01.t}$.

Exercice 2 : (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points A(1,-1,1) ,

B(-2,2,1) , $I\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$ et la droite (D) dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x=1-t \\ y=-t \\ z=2t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

1. Ecrire une représentation paramétrique de la droite (AB).
2. Monter que les droites (D) et (AB) se coupent en I.
3. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (P) déterminer par (D) et (AB) est x+y+z-1=0.
4. On considère le point $H\left(2,1,\frac{5}{2}\right)$.
   a) Vérifier que I est le projeté orthogonal de H sur (P).
   b) Vérifier que (D) et (AB) sont perpendiculaires.
   c) K est un point de (D) tel que IK = IA. Calculer le volume du tétraèdre HABK.

Exercice 3 : (4 points)

1. Déterminer un couple d'entiers relatifs solution de l'équation $48x+35y=1$.
2. En déduire tous les couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de cette équation.

3. L'espace étant rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, On considère le vecteur $\vec{u}=48\vec{i}+35\vec{j}+24\vec{k}$ et le point A(-11, 35, -13).

a) Donner une équation cartésienne du plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{u}$.
b) Soit (D) la droite d'intersection du plan (P) et du plan Q d'équation z = 16.
Déterminer tous les points de D dont les coordonnées sont entières et appartiennent à l'intervalle [-100, 100].

c) En déduire les coordonnées entières du point B de (D) le plus proche de l'origine O.

Exercice 4 : (4 points)

Une banque propose à ses clients de d'abonner au service « Bank.net » qui permet de consulter son compte et d'effectuer des transactions via une connexion internet.

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre de clients de la banque et du nombre de clients abonnés à « bank.net » de l'année 2008 à l'année 2013.

y_i est le nombre de milliers de clients de la banque au 1er janvier de l'année de rang x_i.

q_i est le nombre de milliers de clients de la banque abonnés à « bank.net » au 1er janvier de l'année de rang x_i.

Année	2008	2009	2010	2010	2012	2013
x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	298	310	321	330	339	348
q_i	45	53	63	74	87	103

1. a) Donner, à l'aide de la calculatrice, l'équation de la droite d'ajustement linéaire de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Le coefficient directeur sera arrondi au dixième et l'ordonnée à l'origine sera arrondi à l'unité.
   b) En supposant que l'évolution se poursuive selon ce modèle, donner une estimation du nombre de clients de la banque à « bank.net » au 1er janvier 2017.
2. On pose $z_i=\ln\left(q_i\right)$.
   a) Reproduire et compléter le tableau ci-dessous (les valeurs de z_i seront arrondies au millième) :

x_i	1	2	3	4	5	6
z_i						

   b) Donner, à l'aide de la calculatrice, l'équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis au millième.
   c) En supposant que l'évolution se poursuive selon ce modèle. Justifier que le nombre de clients abonnés à « bank.net » au 1er janvier 2017 peut être estimé à 199 000.

3. On suppose que, jusqu'au 1er janvier 2023, le nombre de clients de la banque évolue selon de modèle obtenu à la question 1.a) et le nombre de clients de la banque abonnés à « bank.net » évolue selon le modèle donné à la question 2.b).

A l'aide de ces deux modèles, quelles prévisions obtient-on pour l'année 2023 ? que pensez-vous ?

Exercice 5 : (5 points)

Les fonctions f et g sont définies sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=(2x+1)e^{-x}$ et $g(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.

Leurs courbes représentatives dans un repères orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ sont notées C_f et C_g. C_g est celle en pointillé (Voir annexe à la page 4/4).

Partie A

Soit φ la fonction sur $[0,+\infty[$ par $\varphi(x)=(x^2+x+1)e^{-x}-1$.

1. a) Déterminer les limites de φ en $+\infty$.

   b) Etablir le tableau de variations de φ sur $[0,+\infty[$.

2. Démontrer que l'équation $\varphi(x)=0$ admet deux solutions dans $[0,+\infty[$, dont l'une dans l'intervalle $]1,+\infty[$ qu'on notera α.
3. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $[0,+\infty[$.
4. Tracer la courbe représentative de φ sur l'annexe ci-joint à la page 4/4.

Partie B

1. Démontrer que les deux courbes C_f et C_g passent par le point A(0, 1) et admettent en ce point la même demi tangente.
2. a) Démontrer que, pour tout x réel positif , $f(x)-g(x)=\dfrac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$.

   b) A l'aide d'un tableau, étudier le signe de f(x) - g(x) sur $[0,+\infty[$.

   c) En déduire la position relative des courbes C_f et C_g.

3. Ci-dessous sont tracées les courbes représentatives C_f et C_g de deux fonctions f et g .

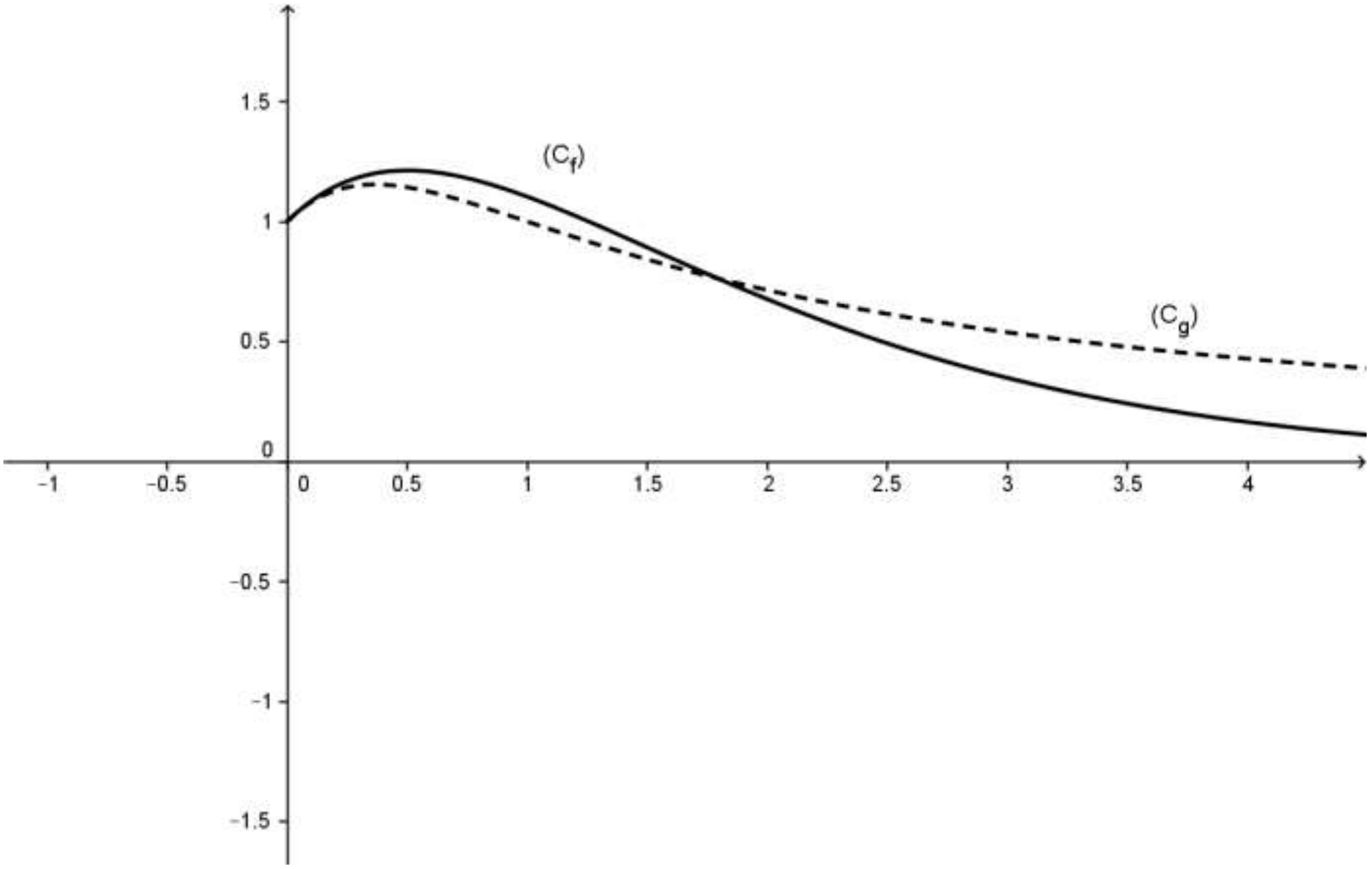
   a) Soit x un réel strictement positif. Calculer à l'aide d'une intégration par parties $\int_0^x (2t+1)e^{-t}dt$.

   b) Soit l'aire S, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=0$.

   Montrer que $S=\dfrac{-\alpha^3+2\alpha^2}{\alpha^2+\alpha+1}$.

Annexe à compléter et à rendre

Nom de l'élève : …………………………………………



Corrigé

Exercice 1 :

1. Vrai

En effet : la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $\left(n,\frac{75}{100}=\frac{3}{4}\right)$ donc

$$p(X=0)=\left(1-\frac{3}{4}\right)^{n}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\frac{1}{2^{2n}}$$

2. Vrai

En effet :

p(M) = 0,01 , $p(M\cap T)=0,99$ et $p(\overline{M}\cap T)=1-p(\overline{M}\cap\overline{T})=1-0,02=0,98$

d'où $p(T)=p(T\cap M)+p(T\cap\overline{M})=p(M)\times p(T|M)+p(\overline{M})\times p(T|\overline{M})$

$$=0,01\times 0,99+0,99\times 0,02=0,0297$$

3. Faux

En effet :

La durée d'attente en secondes à la caisse d'un supermarché est une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre λ = 0,01.

Alors la densité de probabilité de Y est la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par f(t) = $\lambda e^{-\lambda t}=0,01\times e^{-0,01.t}$.

Exercice 2 :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points A(1,-1,1) ,

B(-2,2,1) , $I\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$ et la droite (D) dont une représentation paramétrique est $\begin{cases}x=1-t\\ y=-t\\ z=2t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

1. On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}$ donc $(AB):\begin{cases}x=1-3\alpha\\ y=-1+3\alpha\\ z=1\end{cases}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

2. $\begin{cases}1-t=1-3\alpha\\ -t=-1+3\alpha\\ 2t=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{1}{6}\\ t=\frac{1}{2}\end{cases}$

Pour $t=\frac{1}{2}$, $\begin{cases}1-t=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\\ -t=-\frac{1}{2}\\ 2t=1\end{cases}$ donc les droites (D) et (AB) se coupent en I.

3. Soit (P) le plan déterminé par les droites (D) et (AB) .

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (D) , $\vec{u}\wedge\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\-6\\-6\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P donc

$P:-6x-6y-6z+d=0$, où $d\in\mathbb{R}$.

Or $A(1,-1,1)\in P \Leftrightarrow -6+6-6+d=0 \Leftrightarrow d=6$ donc $P:-6x-6y-6z+6=0 \Leftrightarrow P:x+y+z-1=0$.

4. On considère le point $H\left(2,1,\frac{5}{2}\right)$.

a) On a :

✓ $I\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)\in P$

✓ $\overrightarrow{IH}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IH}=-\frac{1}{4}\vec{u}\wedge\overrightarrow{AB}$ donc $(IH)\perp P$

Ainsi , I est le projeté orthogonal de H sur (P).

b) $\vec{u}.\overrightarrow{AB}=3-3+0=0 \Rightarrow \vec{u}\perp\overrightarrow{AB}$ donc (D) et (AB) sont perpendiculaires.

c) K est un point de (D) tel que IK = IA , le volume du tétraèdre HABK est

$$V_{(HABK)}=\frac{1}{3}A_{(ABK)}\times HI=\frac{1}{3}\frac{AB\times IK}{2}\times HI=\frac{1}{6}AB\times IA\times HI=\frac{1}{6}3\sqrt{2}.\frac{1}{2}\sqrt{2}.\frac{3}{2}\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Exercice 3 :

1.

$(-8)\times$	$48=35\times1+13$	$(-8)\times48=(-8)\times35+(-8)\times13$
$3\times$	$35=13\times2+9$	$3\times35=6\times13+3\times9$
$(-2)\times$	$13=9\times1+4$	$(-2)\times13=(-2)\times9+(-2)\times4$
$1\times$	$9=4\times2+1$	$9=4\times2+1$

D'où $(-8)\times48+3\times35=(-8)\times35+1 \Leftrightarrow 48\times(-8)+35\times11=1$

Donc (-8, 11) est une solution de l'équation $48x+35y=1$.

2. On a : $48x+35y=1$ et $48\times(-8)+35\times11=1$ donc l'équation $48x+35y=1$ est équivalente à $48(x+8)+35(y-11)=0 \Leftrightarrow 48(x+8)=-35(y-11)$.

Il en résulte que 48 divise 35(y – 11) et comme 48 et 35 sont premiers entre eux alors 48 divise y – 11.

D'où il existe un entier k tel que $y-11=48k \Leftrightarrow$ $y=48k+11$.

L'équation $48(x+8)=-35(y-11)$ donne $48(x+8)=-35\times48k \Leftrightarrow x+8=-35k \Leftrightarrow x=-35k-8$.

Ainsi, si $48x+35y=1$ alors $(x,y)=(-35k-8,48k+11)$, où $k\in\mathbb{Z}$.

La réciproque :

Si $(x,y)=(-35k-8,48k+11)$, où $k\in\mathbb{Z}$, alors

$48(-35k-8)+35(48k+11)=-48\times35k+48\times(-8)+35\times48k+35\times11=1$.

Donc tous les couples d'entiers relatifs solutions de cette équation sont $(x,y)=(-35k-8,48k+11)$, où $k\in\mathbb{Z}$.

3. L'espace étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, On considère le vecteur $\vec{u}=48\vec{i}+35\vec{j}+24\vec{k}$ et le point A(-11, 35, -13).

a) Une équation cartésienne du plan (P) de vecteur normal $\vec{u}$ est $48x+35y+24z+d=0$, où $d\in\mathbb{R}$.
Or A(-11, 35, -13) $\in P \Leftrightarrow -528+1225-312+d=0 \Leftrightarrow d=-385$.
Donc $P: 48x+35y+24z-385=0$.

b) Soit (D) la droite d'intersection du plan (P) et du plan Q d'équation z = 16.

$$\begin{cases}48x+35y+24z-385=0\\ z=16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}48x+35y=1\\ z=16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-8-35t\\ y=11+48t\\ z=16\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

Donc $D:\begin{cases}x=-8-35t\\ y=11+48t\\ z=16\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$.

les points de D dont les coordonnées sont entières sont $M_k(-8-35k,11+48k,16)$, où $k\in\mathbb{Z}$.

Pour que les coordonnées de M_k appartiennent à l'intervalle [-100, 100], il faut que

$$\begin{cases}-100\le-8-35k\le100\\ -100\le11+48k\le100\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-108\le35k\le92\\ -111\le48k\le89\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k\in\{-3,-2,-1,0,1,2\}\\ k\in\{-2,-1,0,1\}\end{cases} \Leftrightarrow k\in\{-2,-1,0,1\}$$

Donc, les points de D dont les coordonnées sont entières et appartiennent à l'intervalle [-100, 100] sont $M_{-2}(62,-85,16)$, $M_{-1}(27,-37,16)$, $M_0(-8,11,16)$ et $M_1(-43,59,16)$.

c) Le point de coordonnées entières de la droite (D) le plus proche de l'origine O est $B=M_0$ donc $B(-8,11,16)$.

Exercice 4 :

Une banque propose à ses clients de d'abonner au service « Bank.net » qui permet de consulter son compte et d'effectuer des transactions via une connexion internet.

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre de clients de la banque et du nombre de clients abonnés à « bank.net » de l'année 2008 à l'année 2013.

y_i est le nombre de milliers de clients de la banque au 1er janvier de l'année de rang x_i.

q_i est le nombre de milliers de clients de la banque abonnés à « bank.net » au 1er janvier de l'année de rang x_i .

Année	2008	2009	2010	2010	2012	2013
x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	298	310	321	330	339	348
q_i	45	53	63	74	87	103

1. a) L'équation de la droite d'ajustement linéaire de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés est $y = 9{,}9.\ x + 290$.
   c) Le rang de l'an 2017 est $x_{10} = 10$ donc une estimation du nombre de clients de la banque au 1er janvier 2017 est $9{,}9.\ 10 + 290 = 389$
2. On pose $z_i = \ln(q_i)$.
   a)

x_i	1	2	3	4	5	6
z_i	3,807	3,970	4,143	4,304	4,466	4,635

b) L'équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés est $z = 0{,}165.x + 3{,}642$.

b) Pour x = 10 : $z = 0{,}165 \times 10 + 3{,}642 = 5{,}292$ d'où $\ln q = 5{,}292 \Leftrightarrow q = e^{5{,}292}$ d'où $q \approx 198{,}741$.
Ainsi , le nombre de clients abonnés à « bank.net » au 1er janvier 2017 peut être estimé à 199 000.

3. On suppose que, jusqu'au 1er janvier 2023, le nombre de clients de la banque évolue selon de modèle obtenu à la question 2.a) et le nombre de clients de la banque abonnés à « bank.net » évolue selon le modèle donné à la question 3.b).

A l'aide de ces deux modèles, quelles prévisions obtient-on pour l'année 2023 ? que pensez-vous ?

Le rang de l'année 2023 est 16 ,

- ✓ une estimation du nombre de clients de la banque au 1er janvier 2023 est $9{,}9.\ 16 + 290 = 448{,}4$, c'est-à-dire 448.
- ✓ Pour x = 16 : $z = 0{,}165 \times 16 + 3{,}642 = 6{,}282$ d'où $\ln q = 6{,}282 \Leftrightarrow q = e^{6{,}282}$ d'où $q \approx 534{,}857$.

D'où une estimation du nombre de clients de la banque abonnés à « bank.net » au 1er janvier 2023 est 535.

On constate que le nombre de clients de la banque abonnés à « bank.net » au 1er janvier 2023 est supérieur au nombre de clients de la banque au 1er janvier 2023.

Donc l'estimation pour l'année 2023 est impossible.

Exercice 5 :

Les fonctions f et g sont définies sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=(2x+1)e^{-x}$ et $g(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.

Leurs courbes représentatives dans un repères orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ sont notées C_f et C_g. C_g est celle en pointillé.

Partie A

Soit φ la fonction sur $[0,+\infty[$ par $\varphi(x)=(x^2+x+1)e^{-x}-1$.

1. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x+1)e^{-x}-1=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}+\dfrac{x}{e^x}+\dfrac{1}{e^x}-1=-1$.

b) φ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x\geq 0$, $\varphi'(x)=(2x+1)e^{-x}-(x^2+x+1)e^{-x}$

$=(-x^2+x)e^{-x}$.

$\varphi'(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+x=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=1$.

D'où le tableau de variations de φ sur $[0,+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{e}-1$	$\searrow$	-1

2. Une lecture immédiate donne $\varphi(0)=0$ et comme φ est strictement croissante sur [0, 1] alors 0 est l'unique solution de l'équation $\varphi(x)=0$ dans [0, 1].

D'autre part , φ est continue et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$, $\varphi([1,+\infty[)=\left]-1,\frac{3}{e}-1\right]$ et $0\in\left]-1,\frac{3}{e}-1\right]$ donc l'équation $\varphi(x)=0$ admet dans l'intervalle $]1,+\infty[$ une unique solution α .

3. On a :
   - ✓ $\varphi(0)=0$
   - ✓ φ est strictement croissante sur [0, 1] donc pour tout x de]0, 1] , $\varphi(x)>\varphi(0)>0$.
   - ✓ $\varphi(\alpha)=0$.
   - ✓ φ est continue et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$

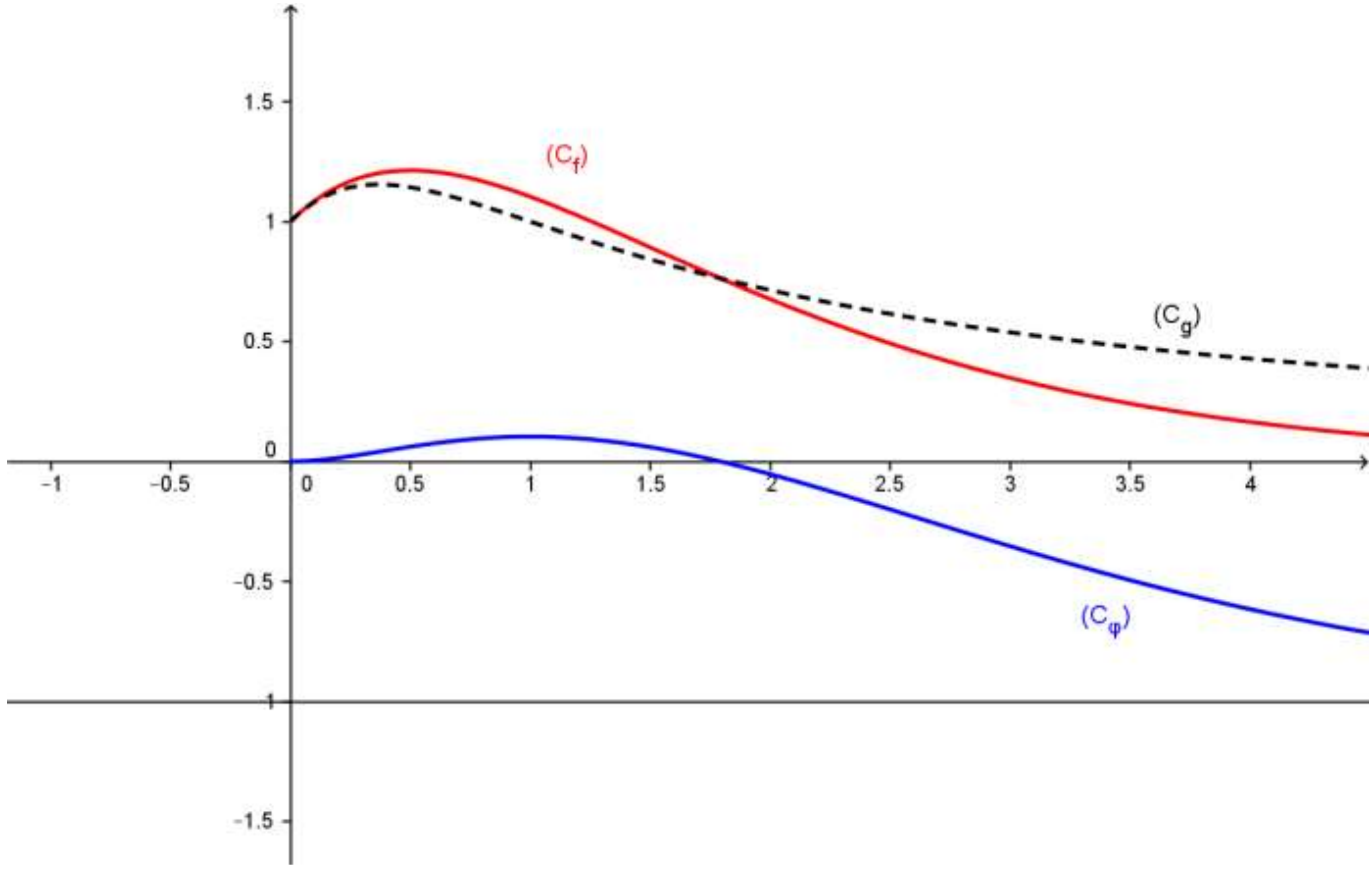
   D'où : si $1<x<\alpha$ alors $\varphi(x)>\varphi(\alpha)$ donc $\varphi(x)>0$

   et si $x>\alpha$ alors $\varphi(x)<\varphi(\alpha)$ donc $\varphi(x)<0$.

Ainsi :

x	0		α		$+\infty$
$\varphi(x)$	0	+	0	-	

4. La courbe représentative de φ :



Partie B

1. Comme f(0) = 1 et g(0) = 1 alors les deux courbes C_f et C_g passent par le point A(0, 1).
Pour tout réel x positif , $f(x) = (2x+1)e^{-x}$ donc et $f'(x) = 2e^{-x} - (2x+1)e^{-x} = (1-2x)e^{-x}$ d'où $f'(0) = 1$.

Pour tout réel x positif , $g(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ donc et $f'(x) = \dfrac{2(x^2+x+1)-(2x+1)^2}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{-2x^2-2x+1}{(x^2+x+1)}$ d'où

$g'(0) = 1$. Ainsi, les deux courbes C_f et C_g admettent au point A(0, 1) la même demi tangente.

2. a) Pour tout x réel positif ,

$$f(x) - g(x) = (2x+1)e^{-x} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \frac{(2x+1)\left((x^2+x+1)e^{-x}-1\right)}{x^2+x+1} = \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}.$$

b) Remarquons d'abord que pour tout x réel positif , $x^2+x+1 = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} + 1 = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ et

que 2x + 1 > 0 d'où le signe de f(x) - g(x) sur $[0,+\infty[$ est celui de $\varphi(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$\varphi(x)$	0	+	0	-	
f(x) - g(x)	0	+	0	-	

c) Pour tout x de $]0,\alpha[$, f(x) - g(x) > 0 donc C_f est au dessus de C_g.

Pour tout x de $]\alpha,+\infty[$, f(x) - g(x) < 0 donc C_f est au dessous de C_g.

C_f et C_g se coupent aux points A(0, 1) et $B\left(\alpha,\dfrac{2\alpha+1}{\alpha^2+\alpha+1}\right)$.

3. a) Soit x un réel strictement positif , Calculons à l'aide d'une intégration par parties $\displaystyle\int_0^x (2t+1)e^{-t}dt$:

On pose : u(t) = 2t +1 , u'(t) = 2

v'(t) = e^{-t} , v(t) = $-e^{-t}$

On obtient : $\displaystyle\int_0^x (2t+1)e^{-t}dt = \left[-(2t+1)e^{-t}\right]_0^x + 2\int_0^x e^{-t}dt = -(2x+1)e^{-x}+1+2\left[-e^{-t}\right]_0^x$

$$= -(2x+1)e^{-x}+1-2e^{-x}+2 = -(2x+3)e^{-x}+3$$

b) Soit l'aire S, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations x = α et x = 0.

$$S=\int_0^x\left(f(t)-g(t)\right)dt=\int_0^x\left((2t+1)e^{-t}-\frac{2t+1}{t^2+t+1}\right)dt=\int_0^x(2t+1)e^{-t}dt-\int_0^x\frac{2t+1}{t^2+t+1}dt\ .$$

$$=3-(2\alpha+3)e^{-\alpha}-\left[\ln\left(t^2+t+1\right)\right]_0^\alpha=3-(2\alpha+3)e^{-\alpha}-\ln\left(\alpha^2+\alpha+1\right)$$

Or $\varphi(\alpha)=0 \Leftrightarrow \left(\alpha^2+\alpha+1\right)e^{-\alpha}-1=0 \Leftrightarrow \left(\alpha^2+\alpha+1\right)e^{-\alpha}=1 \Leftrightarrow \alpha^2+\alpha+1=e^{\alpha} \Leftrightarrow \ln\left(\alpha^2+\alpha+1\right)=\alpha$, il en résulte :

S = $3-(2\alpha+3)e^{-\alpha}-\ln\left(\alpha^2+\alpha+1\right)=3-(2\alpha+3)\dfrac{1}{\alpha^2+\alpha+1}-\alpha=\dfrac{3\alpha^2+3\alpha+3-(2\alpha+3)-\alpha^3-\alpha^2-\alpha}{\alpha^2+\alpha+1}$

$$=\frac{-\alpha^3+2\alpha^2}{\alpha^2+\alpha+1}$$