Exercice 1 : **(7 points)**

Dans l'annexe ci-jointe à la page 3/3, on a tracé dans le même repère les courbes (C_f) et (C_h) respectivement des fonctions f et h où h est la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=f(x)-\frac{1}{x}$.

On donne $f(0,5)=1,6$ et $f(1)=2,7$.

1. a) Démontrer que pour tout x réel, f(x) > 0 puis déterminer $f(]0,+\infty[)$.

   b) Prouver que l'équation $f(x)=\frac{1}{x}$ admet une unique solution a strictement positive et vérifier que $0,5 < \alpha < 1$.

2. On pose $g=\frac{1}{f}$.

   a) Démontrer que l'ensemble de définition de $f\circ g$ est $\mathbb{R}$.

   b) Démontrer que $f\circ g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

   c) Déterminer $f\circ g(0)$, $f\circ g(\alpha)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f\circ g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f\circ g(x)$.

3. a) Montrer que , pour tout réels a et b : si $a<b$ alors $f\circ g(a) > f\circ g(b)$. En déduire le sens de variation de $f\circ g$ sur $\mathbb{R}$.

   b) Placer le point $A\left(\alpha,\frac{1}{\alpha}\right)$ puis construire avec soin la courbe de $f\circ g$ sur la figure donnée à l'annexe à la page 3/3.

Exercice 2 : **(7 points)**

Le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

On appelle (Γ) le cercle de centre O et de rayon 1. On fera une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.

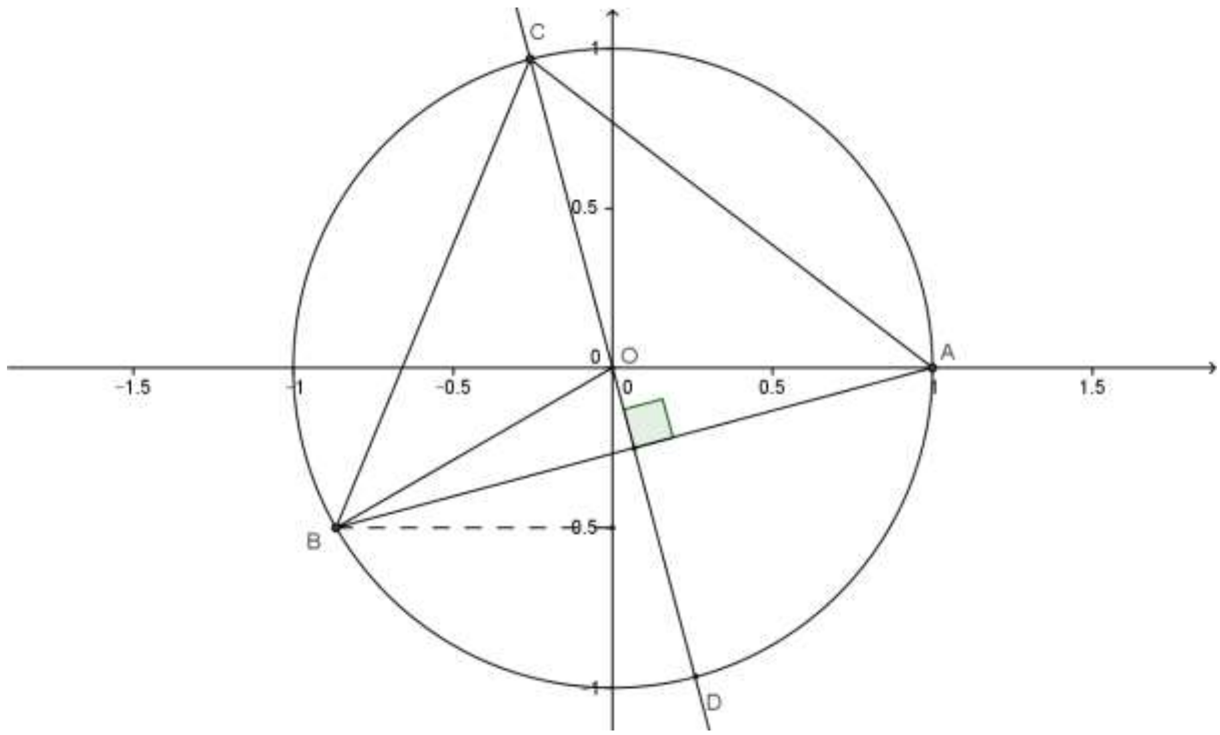
A tout point M distinct de O d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=z+i-\frac{1}{z}$.

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $a=i$ et $b=e^{i\frac{\pi}{6}}$ et leurs images A' et B' d'affixes respectives a' et b'.
   a) Calculer a' et b'.
   b) Placer les points A, B , A' et B'.
   c) Montrer que $\frac{-b}{b'-b}=i\frac{\sqrt{3}}{3}$. En déduire la nature du triangle OBB'.

2. On note (E) l'ensemble des points M tels que M' est confondu avec O.
   a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + iz - 1 = 0$.
   b) En déduire l'ensemble (E).
   c) Démontrer que les points de (E) appartiennent à (Γ).
3. Soit θ un réel quelconque.
   a) Démontrer que : si $z = e^{i\theta}$ alors $z' = (1 + 2\sin\theta)i$.
   b) En déduire que si M appartient au cercle (Γ) alors M' appartient au segment [A'C] où C a pour affixe –i.

<u>Exercice 3:</u> (6 points)

Le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O.



1. Montrer que l'affixe de B est $z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ puis écrire z_B sous forme exponentielle.

2. La médiatrice du segment [AB] coupe le cercle $\mathscr{C}$ aux points C et D (voir figure ci-dessus).

   a) Montrer que $\arg(z_C) \equiv \frac{7\pi}{12}[2\pi]$.

   b) Donner l'écriture exponentielle de z_C. En déduire celle de z_D.

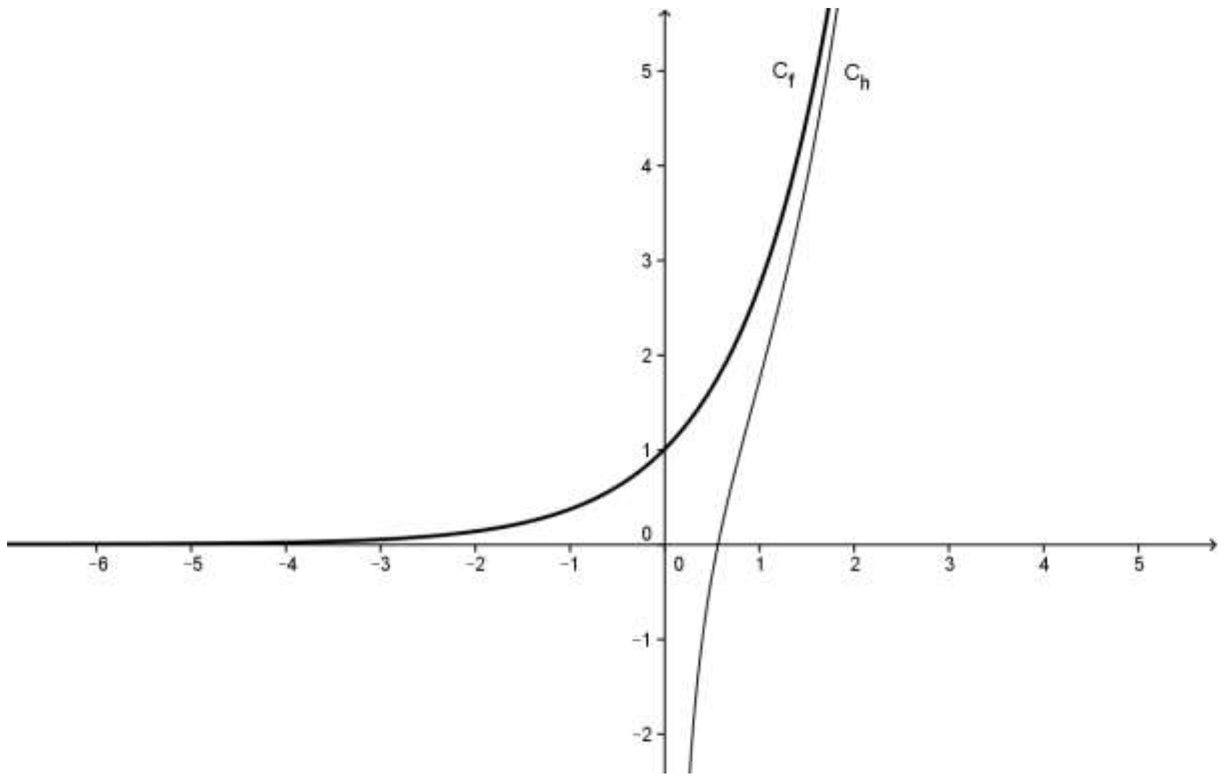
3. a) Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de $z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

   b) En déduire la forme algébrique de z_C.

Annexe à compléter et à rendre avec la copie

Nom de l' élève :……………………………………………………………..

Figure de l'exercice 1 :



Corrigé

Exercice 1 :

Dans l'annexe ci-jointe à la page 3/3, on a tracé dans le même repère les courbes (C_f) et (C_h) respectivement des fonctions f et h où h est la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=f(x)-\frac{1}{x}$.

On donne $f(0,5)=1,6$ et $f(1)=2,7$.

1. a) (C_f) est au dessus de l'axe des abscisses donc pour tout x réel , f(x) > 0 .

f est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc

$f(]0,+\infty[)=\left]\lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[=]1,+\infty[$.

b) Pour tout x > 0 , $f(x)=\frac{1}{x} \Leftrightarrow h(x)=0$.

h est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$

$h(]0,+\infty[)=\left]\lim_{x\to 0^+} h(x), \lim_{x\to+\infty} h(x)\right[=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$.

$0\in h(]0,+\infty[)$

Donc l'équation $f(x)=\frac{1}{x}$ admet une unique solution a strictement positive.

$h(0,5)=f(0,5)-2=-0,4$ et $h(1)=f(1)-1=1,7$ donc $h(0,5)\times h(1)<0$.

Ainsi , 0,5 < α < 1.

2. On pose $g=\frac{1}{f}$.

a) $f\circ g(x)=f[g(x)]$ est défini $\Leftrightarrow x\in D_g$ et $g(x)\in D_f$

Or , $D_f=\mathbb{R}$ et pour tout x réel , f(x) > 0 donc $g(x)=\frac{1}{f(x)}>0$.

Donc $D_g=\mathbb{R}$ et $g(x)\in\mathbb{R}$.

Par suite , $D_{f\circ g}=\mathbb{R}$.

b) f est continue et non nulle sur $\mathbb{R}$ donc g est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x réel , f(x) > 0 donc $g(x)=\frac{1}{f(x)}>0$ par suite $g(x)\in]0,+\infty[$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $]0,+\infty[$.

Il en résulte que $f\circ g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

c) $f\circ g(0)=f\left[g(0)\right]=f\left[\dfrac{1}{f(0)}\right]=f(1)=2,7.$

$f\circ g(\alpha)=f\left[g(\alpha)\right]=f\left[\dfrac{1}{f(\alpha)}\right]=f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0^+$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f\circ g(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f\circ g(x)=1$.

3. a) f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ d'où pour tout réels a et b : si $a<b$ alors $g(a)>g(b)$ donc $f\circ g(a)>f\circ g(b)$.

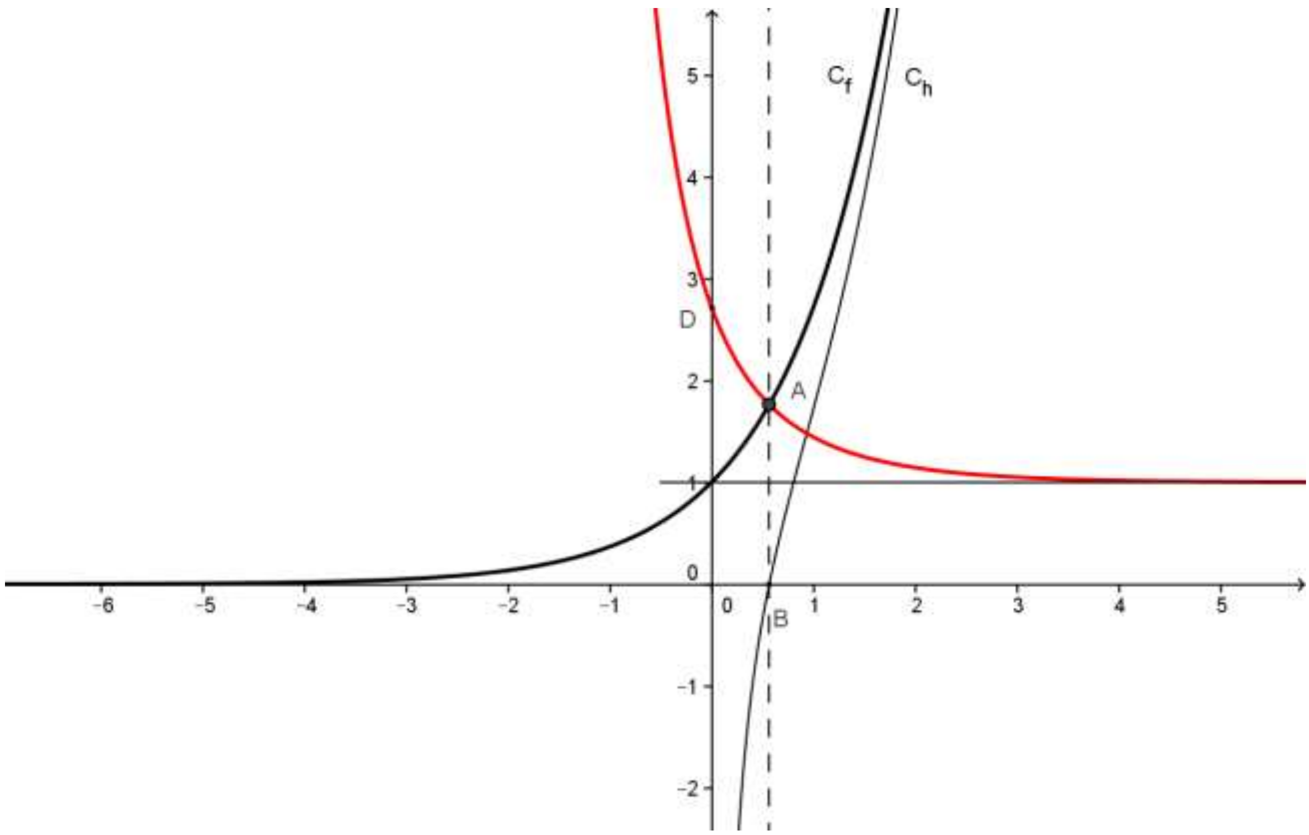
Donc $f\circ g$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

b) La courbe (C_h) rencontre l'axe des abscisses au point B(α ,0) . La droite d'équation $x=\alpha$ rencontre la courbe (C_f) au point $A\left(\alpha,\dfrac{1}{\alpha}\right)$.

La courbe de $f\circ g$ (tracée en rouge) :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\circ g(x)=1$ donc la droite d'équation y = 1 est une asymptote à $C_{f\circ g}$ au voisinage de $+\infty$.

$C_{f\circ g}$ passe par les points $A\left(\alpha,\dfrac{1}{\alpha}\right)$ et $D(0;2,7)$.



Exercice 2 :

A tout point M distinct de O d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = z + i - \frac{1}{z}$.

1. On considère les points A et B d'affixes respectives a = i et b = $e^{i\frac{\pi}{6}}$ et leurs images A' et B' d'affixes respectives a' et b'.

a) $a' = a + i - \frac{1}{a} = i + i - \frac{1}{i} = 2i + i = 3i$

et $b' = b + i - \frac{1}{b} = e^{i\frac{\pi}{6}} + i - \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}} + i = 2i\sin\frac{\pi}{6} + i = 2i$.

b) Voir figure ci-dessous.

c) $\frac{-b}{b'-b} = \frac{-e^{i\frac{\pi}{6}}}{2i - e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i} = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-3i} = \frac{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+3i)}{12} = \frac{4i\sqrt{3}}{12} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Donc $\frac{z_{\overrightarrow{BO}}}{z_{\overrightarrow{BB'}}} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{BO}$ et $\overrightarrow{BB'}$ sont orthogonaux d'où le triangle OBB' est rectangle en B..

2. On note (E) l'ensemble des points M tels que M' est confondu avec O.

a) Le discriminant de l'équation $z^2 + iz - 1 = 0$ est $\Delta = -1 + 4 = 3$ donc les solutions de l'équation $z^2 + iz - 1 = 0$ sont $z_1 = \frac{-i-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ et $z_2 = \frac{-i+\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

b) $M \in (E) \Leftrightarrow M' = O \Leftrightarrow z' = 0 \Leftrightarrow z + i - \frac{1}{z} = 0$ et $z \neq 0 \Leftrightarrow z^2 + iz - 1 = 0$ et $z \neq 0$

$\Leftrightarrow z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ ou $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

Ainsi, l'ensemble (E) est $\left\{ M_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right),\ M_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \right\}$.

c) $OM_1 = \left|-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right| = 1$ et $OM_2 = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right| = 1$ donc $M_1 \in \Gamma$ et $M_2 \in \Gamma$.

3. Soit θ un réel quelconque.

a) si $z=e^{i\theta}$ alors $z'=e^{i\theta}+i-\frac{1}{e^{i\theta}}=e^{i\theta}-e^{-i\theta}+i=2i\sin\theta+i=(1+2\sin\theta)i$.

b) si M appartient au cercle (Γ) alors $z=e^{i\theta}$ donc $z'=(1+2\sin\theta)i$.

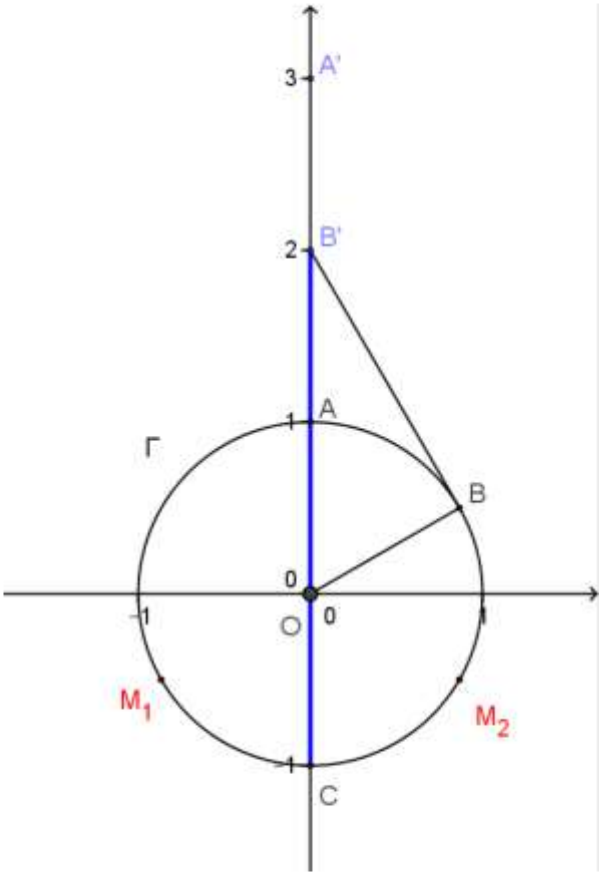
On pose $z'=x'+iy'$, avec x' et y' sont réels :

On obtient : $\begin{cases} x'=0 \\ y'=1+2\sin\theta \end{cases}$.

$x'=0$ donc $M'\in(O,\vec{v})$.

$-1\le\sin\theta\le 1\Leftrightarrow -2\le 2\sin\theta\le 2\Leftrightarrow -1\le y'\le 3$

Donc M' appartient au segment [A'C] où C a pour affixe –i.



Exercice 3: (6 points)

1. On pose : $z_B=x+iy$ avec x et y sont réels. Comme l'ordonnées du point B est $-\frac{1}{2}$ et son abscisses x est strictement négative alors $z_B=x+\frac{1}{2}i$ et x < 0.

D'autre part , $B\in\mathscr{C}$ donc $|z_B|=1\Leftrightarrow|z_B|^2=1\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{4}=1\Leftrightarrow x^2=\frac{3}{4}$ d'où $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi , $z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$.

$z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

2. a) (CD) est la médiatrice du segment [AB] donc (CD) est la bissectrice intérieure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$. Donc $\arg\left(z_C\right)\equiv\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)[2\pi]\equiv\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)[2\pi]\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{7\pi}{6}\right)[2\pi]\equiv\frac{7\pi}{12}[\pi]$.

b) Comme C est un point du cercle $\mathscr{C}$ alors $|z_C| = OC = 1$. Il en résulte : $z_C = e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

C et D sont diamétralement opposés sur le cercle $\mathscr{C}$ donc D est le symétrique de C par rapport à O donc $z_D = -z_C = e^{-i\frac{5\pi}{12}}$.

3. a) Pour déterminer sous forme algébrique les racines carrées de $z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$, on résout dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} a^2+b^2=|z_B| \\ a^2-b^2=\text{Ré}\left(z_B\right) \\ ab \text{ et } \text{Im}\left(z_B\right) \text{ ont le même signe}\end{cases}$ d'où

$$\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ a^2-b^2=-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ ab<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2=\frac{2-\sqrt{3}}{2} \\ 2b^2=\frac{2+\sqrt{3}}{2} \\ ab<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=\frac{2-\sqrt{3}}{4} \\ b^2=\frac{2+\sqrt{3}}{4} \\ ab<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \\ b=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \\ b=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\end{cases}.$$

Donc les racines carrées de z_B sont $z_1 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}-i\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ et $z_2 = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}+i\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

b) $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ donc les racines carrées de z_B sont $z' = e^{-i\frac{5\pi}{12}}$ et $z'' = -e^{-i\frac{5\pi}{12}} = e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

Comme $\text{Ré}\left(z_C\right)<0$ et $\text{Im}\left(z_C\right)>0$ alors $z_C = z_2 = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}+i\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.