

Exercice 1: (3 points)

Répondre par Vrai ou Faux en justifiant la réponse.

1. la fonction $x \mapsto 2^x$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - \ln 2 \cdot y = 0$.
2. Si a est un réel strictement positif différent de 1 alors $a^{\frac{1}{\ln a}} = e$.
3. Si a est un réel de l'intervalle $]1, e[$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln a)^x = +\infty$.

Exercice 2 : (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. x et y sont deux réels non nuls. X et Y sont deux réels.

A tout point M d'affixe $z = x + iy$, on associe le point M' d'affixe $Z = X + iY$ telle que $Z = z + \frac{1}{z}$.

1. Démontrer que $X = x \left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2} \right)$ et $Y = y \left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2} \right)$.

2. On suppose que le point M se déplace sur le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 4$.

Exprimer X et Y en fonction de x et y et démontrer que M' se déplace sur l'ellipse (E) d'équation $36X^2 + 100Y^2 = 225$.

3. On suppose que le point M se déplace sur la droite d'équation $y = x$, privé de O .

Vérifier que le point M' se déplace sur l'hyperbole (H) d'équation $X^2 - Y^2 = 2$.

4. Prouver que l'ellipse (E) et l'hyperbole (H) ont les mêmes foyers.

5. a) Vérifier que $A \left(\frac{5\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4} \right)$ est un point commun de (E) et (H).

b) Démontrer que les tangentes à (E) et à (H) en A sont perpendiculaires.

Exercice 3 : (3 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère (P) le plan d'équation cartésienne $6x + 7y + 8z = 57$.

1. Montrer que les plans (P) et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont sécants suivant une droite (D) puis donner une représentation paramétrique de (D).

2. a) Déterminer un couple d'entiers relatifs (a, b) solution de l'équation $6a + 7b = 1$.

b) Déterminer les couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation $6x + 7y = 57$.

3. Prouver que la droite (D) ne contient qu'un seul point E dont les coordonnées sont des entiers naturels. Préciser les coordonnées de E.

4. On considère les points $F(0, 7, 1)$ et $G(7\alpha - 57, -6\alpha + 57, 0)$ où α est entier.

Déterminer α pour que le volume du tétraèdre OEFG soit égal à 57.

Exercice 4 : (4 points)

Dans la figure sur annexe ci-jointe à la page 4/4 , ABC est un triangle tel que $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. On désigne par Γ le cercle de centre O circonscrit au triangle ABC . Soit (T) est la tangente au cercle Γ au point C. On note E est le symétrique de A par rapport à (T) et par F le symétrique de B par rapport à (CE).

1. a) Montrer que ACE et BCF sont deux triangles équilatéraux.

b) En déduire que F appartient à (T).

2. Soit I le milieu de [AE]. Montrer que $\overrightarrow{CF} = -2\overrightarrow{CI}$.

On considère la similitude indirecte f de centre C qui envoie I sur F.

3. Déterminer le rapport et l'axe de f.

4. Soit G l'image de A par f.

a) Montrer que les droites (EA) et (FG) sont parallèles.

b) Montrer que $\overrightarrow{CG} = -2\overrightarrow{CE}$

c) En déduire une construction de G.

Exercice 5: (6 points)

Partie A

Soit g et G les fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{e^{2x} - 1}$ et $G(x) = \int_0^x g(t)dt$

1. Pour tout x de $[0, +\infty[$, on pose $H(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

a) Montrer que H est dérivable sur $[0, +\infty[$ et calculer $H'(x)$ pour tout x de $[0, +\infty[$.

b) Calculer $(H \circ \tan)'(x)$ pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En déduire que pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $(H \circ \tan)(x) = x$.
Calculer $H(1)$.

2. Pour tout x de $[0, +\infty[$, on pose $F(x) = g(x) - (H \circ g)(x)$.

a) Vérifier que F et G sont dérivables sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x > 0$, $F'(x) = G'(x)$.

b) En déduire que pour tout x de $[0, +\infty[$, $G(x) = F(x)$. Calculer $I = \int_0^{\ln(\sqrt{2})} g(t) dt$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = e^{2x} - 1$. On pose $I_0 = \ln(\sqrt{2})$ et

pour tout entier naturel n non nul, on pose $I_n = \int_0^{\ln(\sqrt{2})} [f(x)]^{\frac{n}{2}} dx$.

1. a) Vérifier que f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que pour tout x réel positif, $f'(x) = 2[1 + f(x)]$ (1).

b) Montrer que en utilisant la relation (1) que pour tout $n > 0$, $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+2}$ (2)

Vérifier que la relation (2) est encore valable pour $n = 0$.

c) En remarquant que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

2. Pour tout entier naturel n , on pose $U_n = I_{n+4} - I_n$.

a) En remplaçant n par $(n+2)$ dans la relation (2), montrer que pour tout entier n , $U_n = \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+2}$.

En déduire l'expression de U_{4n+1} en fonction de n .

b) Calculer $\sum_{n=0}^p U_{4n+1}$ en fonction de I_{4p+5} et de I_1 .

c) Calculer la limite lorsque p tend vers $+\infty$ de la somme $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{4p+3} + \frac{1}{4p+5} = \sum_{n=0}^{2p+2} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Annexe à compléter et à rendre avec la copie

Nom de l'élève :

