Lycée IBN KHALDOUN RADES Mr ABIDI Farid	Bac Blanc 2014 MATHEMATIQUES	Classe : 4M 1 Durée : 4H 08 Mai 2014

Exercice 1 : (3 points)

On a procédé à l'ajustement affine par la méthode des moindres carrés à un nuage de points d'une série statistiques double (X, Y). Les résultats obtenus sont les suivants :

- La droite de régression de Y en X est D : $y = 0,23x + 3,04$
- La droite de régression de X en Y est D' : $x = 3,68y - 10,88$.

Répondre par Vrai ou Faux aux propositions suivantes en justifiant :

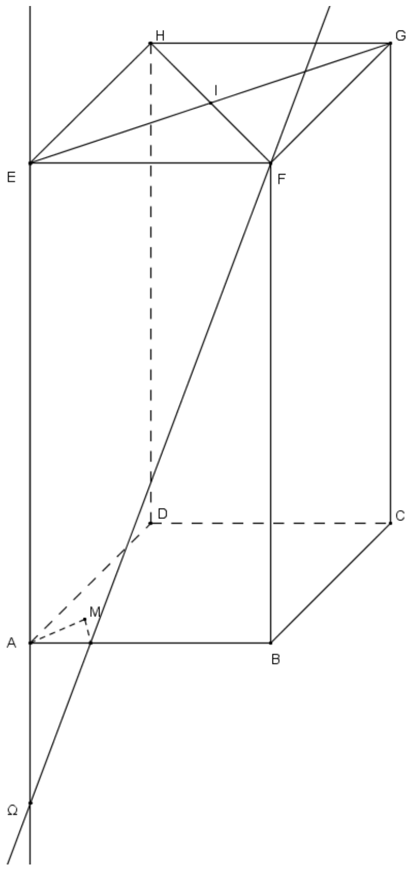
1. Les moyennes arithmétiques de Y et de Y sont : $\overline{X} = 3,5$ et $\overline{Y} = 2$.
2. Le coefficient de corrélation linéaire de la série (X, Y) est $r = 0,92$.
3. Si la variance de Y est 5 alors la covariance de la série (X, Y) est $18,04$.

Exercice 2: (5 points)

Soit a un réel strictement positif et ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tels que AE = 2AB = 2AD = 2a.

On considère le point P tel que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. Soit le point M à l'intérieur du carré ABCD tel que le triangle AMP soit équilatéral. Les droites (AE) et (PF) se coupent en un point Ω.

On rapporte l'espace au repère orthonormé direct $\left(A, \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2a}\overrightarrow{AE}\right)$.



1. Montrer que les coordonnées de Ω sont $\left(0, 0, -\frac{2a}{3}\right)$.
2. On considère l'application f de l'espace dans lui-même qui à tout point M(x, y, z) associe le point M'(x', y', z') tel que $\begin{cases} x' = 4x \\ y' = 4y \\ z' = 4z + 2a \end{cases}$.
3. a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

   b) Déterminer f(P).

   c) On désigne par N l'image de M par f , montrer que le triangle EFN est équilatéral.
4. a) Exprimer à l'aide de a l'aire du triangle APM.
   b) En déduire le volume du solide APMEFN.

5. Soit I le centre du carré EFGH. Montrer que les droites (AC) et (ΩI) sont sécantes.

Exercice 3: (3 points)

La durée de vie d'un lave-linge (en années) peut-être modélisée par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

Une étude statistique montre qu'au bout de 7 ans, 60% des lave-linges sont en état de fonctionnement.

Dans les questions 1 et 2, on donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-3} de chaque probabilité.

1. Montrer que les données se traduisent par $e^{-7\lambda}=0,6$.
   Donner la valeur de λ arrondie à 10^{-3}.
2. a) Calculer la probabilité qu'un lave-linge ait une durée de vie inférieure à 6 ans.
   b) Calculer la probabilité qu'un lave-linge ait une durée de vie supérieure ou égale à 10 ans.
   c) On sait qu'un lave-linge a fonctionné pendant 7 ans, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie inférieure à 10 ans.

3. Calculer t, arrondie à 10^{-1}, pour que $p(T<t)=p(T\geq t)$.

Exercice 4 : (4 points)

Une urne contient deux boules numérotées 1, deux boules numérotées (-1) et trois boules numérotées 0. On dispose en réserve d'une boule numérotée (-1). Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

Un élève participe au jeu suivant :

il tire au hasard une boule de l'urne

- Si la boule tirée porte le numéro 1, il gagne $2n$ points et le jeu s'arrête ; où $n\in\mathbb{N}$.
- Si la boule tirée porte le numéro (-1), il perd $2n$ points et le jeu s'arrête ;
- Si la boule tirée porte 0, on introduit la boule de réserve numérotée (-1) dans l'urne sans remettre la boule numérotée 0 que l'élève vient de tirer, puis l'élève procède à un nouveau tirage d'une boule de l'urne :
  - ✓ Si la boule tirée porte le numéro 1, il gagne $2n$ points et le jeu s'arrête ;
  - ✓ Si la boule tirée porte le numéro 0, il gagne n points et le jeu d'arrête ;
  - ✓ Si la boule tirée porte le numéro (-1), il perd $2n$ points et le jeu s'arrête.

1. a) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   A : « l'élève gagne $2n$ points au premier tirage »
   B : « le jeux s'arrête au premier tirage ».

   b) Soit l'évènement C : « l'élève perd au jeu ». Démontrer que p(C) = $\frac{23}{49}$.

2. On considère la variable aléatoire X égale au gain algébrique du joueur.

   a) Déterminer la loi de probabilité de X.

   b) Calculer l'espérance mathématiques de X. Que peut-on en déduire ?

3. L'élève a effectué une série de trois parties. On suppose que toutes les parties sont indépendantes les unes des autres. Soit Y la variable aléatoire correspondant au nombre de parties gagnés par l'élève dans une série de trois parties.

a) Quelle loi suit Y ? Donner ses paramètres.

b) Calculer la probabilité que l'élève gagne au moins deux parties.

(On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-3}).

Exercice 5: (5 points)

Partie A

L'objectif de cette partie est de prouver que pour tout entier naturel n, $e^{n+1} > 2n+1$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout entier naturel n <u>non nul</u> par : $u_n = \dfrac{2n+3}{2n+1}$.

1. Etudier le sens de variation de la suite (u_n).
2. Vérifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par le réel e.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $e^{n+1} > 2n+1$.

Partie B

Un entier non nul n étant donné, on considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par

$f_n(x) = \dfrac{x-n}{x+n} - e^{-x}$.

1. a) Calculer $f'_n(x)$ et déterminer son signe.

   b) Préciser la valeur de $f_n(0)$ ainsi que celle de $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

   c) Dresser le tableau de variation de la fonction f_n.

2. Déterminer le signe de chacun des nombres $f_n(n)$ et $f_n(n+1)$.

3. a) Prouver que l'équation $f_n(x)=0$ admet une solution et une seule appartenant à l'intervalle [n, n+1] ; cette solution sera notée v_n.

   b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{n}$.

4. a) Calculer, en fonction de n, $w_n = \int_0^{v_n} f_n(x)\,dx$.

   b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$

Corrigé de l'exercice 3 :

2 BOULES N° 1

2 BOULES N° –1 RESERVE : 1 BOULE N° –1

3 BOULES N° 0

1. a) CALCUL DE PROBABILITES

A : « TATY gagne 500F au premier tirage »

B : « LE jeu s'arrête au premier tirage »

$\boxed{p(A) = \frac{2}{7}}$ 0,5 et $\boxed{p(B) = \frac{4}{7}}$ 0,5

b) PROBABILITE DE L'EVENEMENT C

C : « TATY PERD AU JEU »

$p(C) = \frac{2}{7} + \frac{3}{7} \times \frac{3}{7}$

soit $\boxed{p(C) = \frac{23}{49}}$ 0,5

2. VARIABLE ALEATOIRE

a) LOI DE PROBABILITE DE X

VALEURS DE X : -500 ; 250 ; 500

$p(X=-500) = p(C) = \frac{23}{49}$

$p(X=250) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{49}$

$p(X=500) = \frac{2}{7} + \frac{3}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{20}{49}$

$X=x_i$	-500	250	500	TOTAL
$p(X=x_i)$	$\frac{23}{49}$	$\frac{6}{49}$	$\frac{20}{49}$	1

1

b) ESPERANCE MATHEMATIQUE

$E(X) = -500 \times \frac{23}{49} + 250 \times \frac{6}{49} + 500 \times \frac{20}{49}$

0,5 $\boxed{E(X)=0}$ 0,25 Donc le jeu est EQUITABLE

3. PROBABILITE QUE TATY GAGNE AU MOINS UNE PARTIE SUR TROIS

$$\boxed{\begin{array}{l} p = 1 - \left(\frac{23}{49}\right)^3 \\ p \simeq 0,89658 \end{array}}$$

0,75