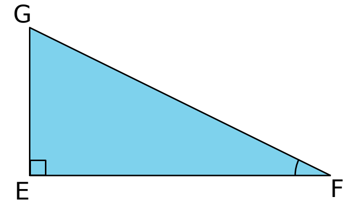
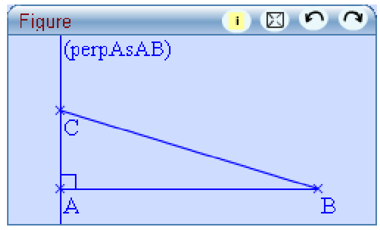
Trigonométrie

Activité 1 : Un angle aigu

EFG est un triangle rectangle en E tel que EG = 4 cm et EF = 7 cm.
Détermine le mesure de l'angle $\widehat{EFG}$ arrondie au degré.



Activité 2 : Avec le logiciel Tracenpoche



Construis un triangle ABC rectangle en A. Place sur le côté [AB] un point M à l'aide du bouton  et construis la perpendiculaire à (AB) passant par M. Nomme N le point d'intersection de cette droite avec le côté [BC].

1. Mesure l'angle $\widehat{ABC}$ en utilisant le bouton  et les côtés [BM] et [BN] à l'aide du bouton .

a. Complète la fenêtre analyse comme ci-contre.
Déplace le point M. Qu'en déduis-tu pour BM et BN ?

b. Que faut-il faire pour changer la valeur de $\frac{BM}{BN}$?
De quoi dépend-elle ?
Comment se nomme ce rapport vu en 4e ?

2. Fixe une mesure pour l'angle $\widehat{ABC}$ puis recopie et complète le tableau suivant pour différentes positions de M sur [AB].

$\widehat{ABC}$ = ...	Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4
MN				
BN				
$\frac{MN}{BN}$				

a. Que peux-tu dire de ton tableau ? Compare ton résultat avec celui de tes camarades.

b. Calcule, dans la fenêtre analyse, le quotient $\frac{MN}{BN}$. Déplace le point M. Que remarques-tu ?

c. Que faut-il faire pour changer cette valeur ?
De quoi dépend-elle ?

$\frac{MN}{BN}$ s'appelle le **sinus de l'angle** $\widehat{ABC}$. On note $\sin \widehat{ABC} = \frac{MN}{BN}$.

3. Fixe une mesure pour l'angle $\widehat{ABC}$ puis recopie et complète le tableau suivant pour différentes positions de M sur [AB].

$\widehat{ABC}$ = ...	Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4
MN				
BM				
$\frac{MN}{BM}$				

a. Que peux-tu dire de ton tableau ? Compare ton résultat avec celui de tes camarades.

b. Calcule, dans la fenêtre analyse, le quotient $\frac{MN}{BM}$. Déplace le point M. Que remarques-tu ?

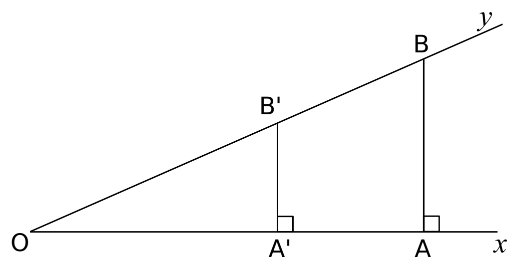
c. Que faut-il faire pour changer cette valeur ?
De quoi dépend-elle ?

$\frac{MN}{BM}$ s'appelle la **tangente de l'angle** $\widehat{ABC}$ et on note $\tan \widehat{ABC} = \frac{MN}{BM}$.

Trigonométrie

Activité 3 : Démonstration

1. Sur la figure ci-contre, A et A' sont deux points de la demi-droite [Ox).
Les perpendiculaires à [Ox) passant respectivement par A et A' coupent [Oy) en B et B'.



Démontre que $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB}$.

2. Cosinus et sinus d'un angle aigu

a. Démontre, à l'aide de l'égalité précédente, que $\frac{OA'}{OB'} = \frac{OA}{OB}$.

b. Démontre que $\frac{A'B'}{OB'} = \frac{AB}{OB}$.

c. La valeur de ces quotients dépend-elle de la position de A' sur [Ox) ?
Si non, de quoi dépend-elle ? Conclus.

3. Tangente d'un angle aigu

a. Démontre maintenant que $\frac{A'B'}{OA'} = \frac{AB}{OA}$.

b. De quoi dépend cette valeur ? Conclus.

Activité 4 : Repérons-nous

1. Synthèse

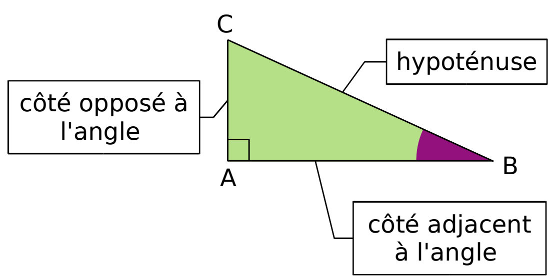
a. Recopie et complète la phrase suivante.

Dans le triangle ... rectangle en ...,

$\cos \widehat{ABC} = \frac{...}{...} = \frac{\text{côté........à....}}{......}$

$\sin \widehat{ABC} = \frac{...}{...} = \frac{\text{côté........à....}}{......}$

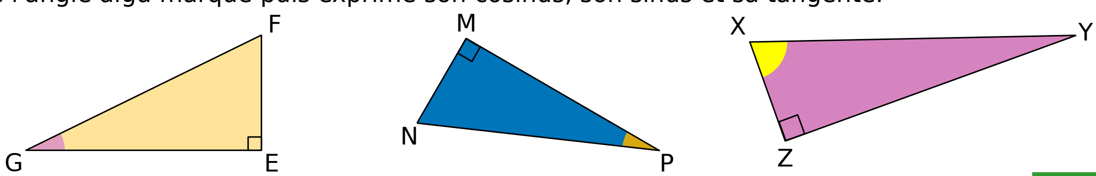
$\tan \widehat{ABC} = \frac{...}{...} = \frac{\text{côté........à....}}{\text{côté........à....}}$.



b. Reproduis la figure ci-dessus et marque l'angle $\widehat{ACB}$.
Repère alors le côté adjacent à l'angle $\widehat{ACB}$ et le côté opposé à $\widehat{ACB}$.

c. Exprime le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle $\widehat{ACB}$.

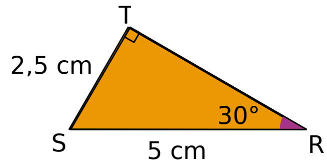
2. Pour chaque triangle ci-dessous, repère l'hypoténuse, le côté adjacent et le côté opposé de l'angle aigu marqué puis exprime son cosinus, son sinus et sa tangente.



Trigonométrie

Activité 5 : À l'aide de la calculatrice

1. Calcul de la mesure d'un angle



a. Quelle est l'hypoténuse du triangle RST rectangle en T ?
Que représente le côté [TS] pour l'angle donné ?

b. Écris l'égalité reliant l'angle $\widehat{TRS}$ et les longueurs SR et TS.
Avec ta calculatrice, vérifie que l'unité de mesure d'angle est bien le degré puis calcule sin 30°. Compare avec le résultat trouvé à l'aide de SR et TS.

Retrouve la mesure de l'angle $\widehat{TRS}$ en utilisant les touches SHIFT SIN (SIN^{-1}).

2. Utilisation de la calculatrice

a. Recopie et complète le tableau suivant. Tu donneras les valeurs arrondies à 0,01 du cosinus, sinus ou tangente de l'angle aigu.

Angle x	15°	30°	45°	68°	75°	80°
cos x						
sin x						
tan x						

b. Détermine la mesure de l'angle aigu x arrondie au degré sachant que :

- cos x = 0,54
- sin x = 0,7
- tan x = 0,9
- tan x = 2,5.

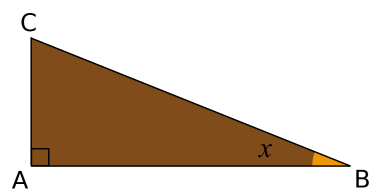
Activité 6 : Formules de trigonométrie

1. Recopie et complète le tableau suivant.

Angle x	cos x	sin x	(cos x)^2	(sin x)^2	(cos x)^2 + (sin x)^2
20°					
35°					
57°					

Que remarques-tu ?

2. Une preuve



a. Dans le triangle ABC rectangle en A, exprime AB et AC en fonction de x et de BC.

b. Prouve que $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

c. Déduis-en la valeur de $(\cos x)^2 + (\sin x)^2$.

3. Une autre formule

a. Exprime tan x dans le triangle ABC rectangle en A.

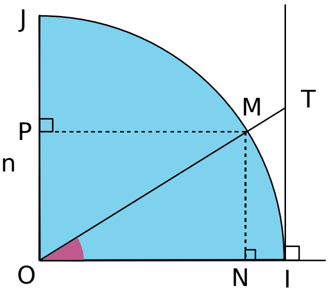
b. En remplaçant AB et AC par les expressions trouvées au **2. a.**, trouve l'expression de la tangente d'un angle aigu en fonction de son sinus et de son cosinus.

c. Sachant que cos x = 0,6, détermine la valeur exacte de sin x puis celle de tan x.

Trigonométrie

Activité 7 : Le quart de cercle trigonométrique

Sur une feuille de papier millimétré, reproduis la figure en prenant le décimètre comme unité pour OI. Tu placeras O en bas à gauche de ta feuille.



1. Coordonnées du point M

a. Calcule cos $\widehat{MOI}$ et sin $\widehat{MOI}$.

b. Déduis-en les coordonnées de M dans le repère (O, I, J) en fonction de l'angle $\widehat{MOI}$.

c. Exprime IT en fonction de l'angle $\widehat{MOI}$.

2. Applications

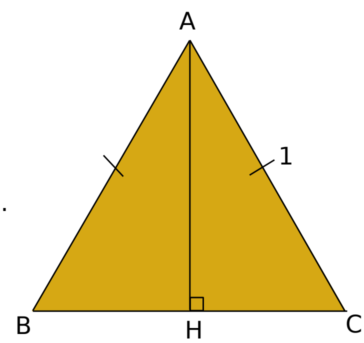
a. Construis un angle $\widehat{M_1OI}$ mesurant 50° puis lis sur la figure les valeurs approchées à un centième près de sin 50°, de cos 50° et de tan 50°.

b. Construis un angle $\widehat{M_2OI}$ sachant que cos $\widehat{M_2OI}$ = 0,4.
Détermine la valeur de sin $\widehat{M_2OI}$ puis une mesure de l'angle $\widehat{M_2OI}$ à un degré près.

c. On sait que sin x = 0,5. À l'aide du graphique, détermine cos x à un centième près puis une mesure de x à un degré près.

d. Peux-tu déterminer tan 75° à l'aide du graphique ?

3. Premier cas particulier : un angle de 60°



a. Quels polygones ont tous leurs angles égaux à 60° ?

b. Considérons le triangle ABC équilatéral de côté 1 unité.
Que peux-tu dire de H ? Justifie ta réponse.
Déduis-en la longueur de BH.

c. Calcule la longueur exacte de AH.

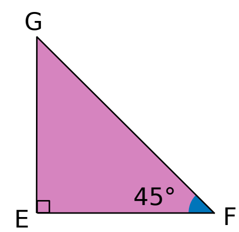
d. Dans le triangle ABH rectangle en H, calcule les valeurs exactes de cos 60°, de sin 60° et de tan 60°.

e. Sur la figure du **2.**, lis les valeurs approchées de cos 60°, de sin 60° et de tan 60°.

f. À l'aide de ta calculatrice, compare ces valeurs avec les valeurs exactes du **d.**.

g. Quelles sont alors les valeurs exactes du cosinus, du sinus et de la tangente d'un angle mesurant 30° ?

4. Deuxième cas particulier : un angle de 45°



a. Le triangle EFG est rectangle en E et l'angle $\widehat{EFG}$ mesure 45°.
Précise la nature de ce triangle. Justifie.

b. On pose EF = 1 unité. Calcule la valeur exacte de FG.

c. Calcule les valeurs exactes de cos 45°, de sin 45° et de tan 45°.

d. Sur la figure du **2.**, construis un angle de 45° et lis les valeurs approchées de cos 45°, sin 45° et tan 45°.

e. À l'aide de ta calculatrice, compare ces valeurs avec les valeurs exactes du **c.**.

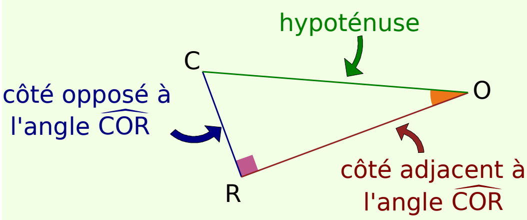
Méthode 1 : Écrire les relations liant angles et longueurs

À connaître

Dans un **triangle rectangle**,
- **le cosinus d'un angle aigu** est le quotient de la longueur du côté adjacent à cet angle par la longueur de l'hypoténuse ;
- **le sinus d'un angle aigu** est le quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur de l'hypoténuse ;
- **la tangente d'un angle aigu** est le quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur du côté adjacent à cet angle.

Remarques : Le cosinus et le sinus d'un angle aigu sont toujours compris entre 0 et 1.
La tangente d'un angle aigu est un nombre supérieur à 0.

Exemple : Le triangle COR est rectangle en R. Écris les formules donnant le cosinus et le sinus de l'angle $\widehat{COR}$ puis la formule donnant la tangente de l'angle $\widehat{RCO}$.



Le triangle COR est rectangle en R donc

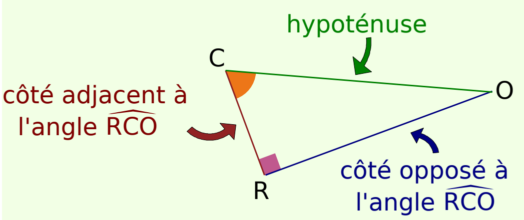
$\cos \widehat{COR} = \dfrac{\text{côté adjacent à } \widehat{COR}}{\text{hypoténuse}}$

$\cos \widehat{COR} = \dfrac{RO}{CO}$

et

$\sin \widehat{COR} = \dfrac{\text{côté opposé à } \widehat{COR}}{\text{hypoténuse}}$

$\sin \widehat{COR} = \dfrac{RC}{CO}$.



Le triangle COR est rectangle en R donc

$\tan \widehat{RCO} = \dfrac{\text{côté opposé à } \widehat{RCO}}{\text{côté adjacent à } \widehat{RCO}}$

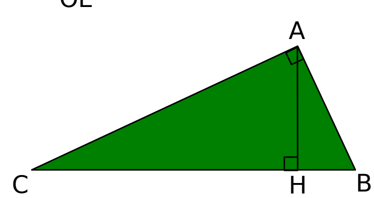
$\tan \widehat{RCO} = \dfrac{RO}{RC}$.

À toi de jouer

1 ENT est un triangle rectangle en E. Écris les rapports de longueurs donnant $\cos \widehat{TNE}$, $\sin \widehat{TNE}$ et $\tan \widehat{TNE}$.

2 NOE est un triangle rectangle en O. Pour chacun des rapports suivants, précise s'il s'agit du cosinus, du sinus ou de la tangente d'un des angles aigus du triangle NOE. Tu préciseras lequel. $\dfrac{NO}{NE}$; $\dfrac{OE}{ON}$; $\dfrac{EN}{EO}$; $\dfrac{EO}{EN}$ et $\dfrac{ON}{OE}$.

3 Sur la figure ci-contre, H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC rectangle en A.

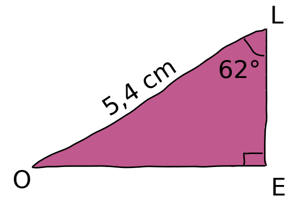


a. Écris de deux façons différentes les rapports de longueurs donnant $\cos \widehat{ACB}$, $\sin \widehat{ACB}$ et $\tan \widehat{ACB}$.

b. Recommence avec l'angle $\widehat{ABC}$.

Méthode 2 : Calculer des longueurs

Exemple 1 : On considère un triangle LEO rectangle en E tel que LO = 5,4 cm et $\widehat{ELO} = 62°$.
Calcule la longueur du côté [EL] arrondie au millimètre.



Dans le triangle LEO rectangle en E,
[LO] est l'hypoténuse ;
[EL] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{ELO}$.
On doit utiliser le cosinus de l'angle $\widehat{ELO}$.
→ On cite les données de l'énoncé qui permettent de choisir la relation trigonométrique à utiliser.

$$\cos \widehat{ELO} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{ELO}}{\text{hypoténuse}}$$

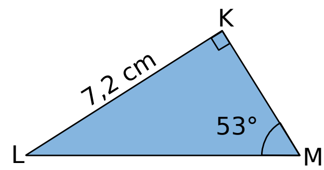
$$\cos \widehat{ELO} = \frac{EL}{LO}$$
→ On écrit le cosinus de l'angle connu (la longueur cherchée doit apparaître dans le rapport).

$$EL = LO \times \cos \widehat{ELO}$$
→ On applique la règle des produits en croix.

$$EL = 5{,}4 \times \cos 62°$$
→ On saisit 5,4 × cos 62.

$$EL \approx 2{,}5 \text{ cm.}$$
→ EL est inférieure à LO.
Le résultat est cohérent.

Exemple 2 : On considère KLM un triangle rectangle en K tel que KL = 7,2 cm et $\widehat{LMK} = 53°$.
Calcule la longueur du côté [LM] arrondie au millimètre.



Dans le triangle KLM rectangle en K,
[LK] est le côté opposé à l'angle $\widehat{LMK}$;
[LM] est l'hypoténuse.
On doit utiliser le sinus de l'angle $\widehat{LMK}$.
→ On cite les données de l'énoncé qui permettent de choisir la relation trigonométrique à utiliser.

$$\sin \widehat{LMK} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{LMK}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\sin \widehat{LMK} = \frac{KL}{LM}$$
→ On écrit le sinus de l'angle connu (la longueur cherchée doit apparaître dans le rapport).

$$LM = \frac{KL}{\sin \widehat{LMK}}$$
→ On applique la règle des produits en croix.

$$LM = \frac{7{,}2}{\sin 53°}$$
→ On saisit 7,2 ÷ sin 53.

$$LM \approx 9 \text{ cm.}$$
→ LM est supérieure à KL.
Le résultat est cohérent.

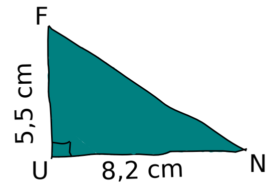
À toi de jouer

4 Le triangle NIV est rectangle en N ; VN = 4 m et l'angle $\widehat{VIN}$ mesure 12°.
Calcule la longueur NI arrondie au centième.

5 Le triangle AUE est rectangle en U ; AE = 10 cm et $\widehat{EAU} = 19°$.
Donne la valeur arrondie au dixième de la longueur du côté [UE].

6 Le triangle VLR est rectangle en V ; LR = 8,7 cm et $\widehat{VRL} = 72°$.
Donne la valeur arrondie au millimètre de la longueur du côté [VR].

Méthode 3 : Calculer la mesure d'un angle



Exemple : Soit FUN un triangle rectangle en U tel que UN = 8,2 cm et UF = 5,5 cm.
Calcule la mesure de l'angle $\widehat{UNF}$ arrondie au degré.

Dans le triangle FUN rectangle en U, [FU] est le côté opposé à l'angle $\widehat{UNF}$; [UN] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{UNF}$. On doit utiliser la tangente de l'angle $\widehat{UNF}$.	→	On cite les données de l'énoncé qui permettent de choisir la relation trigonométrique à utiliser.
$\tan \widehat{UNF} = \dfrac{\text{côté opposé à } \widehat{UNF}}{\text{côté adjacent à } \widehat{UNF}}$ $\tan \widehat{UNF} = \dfrac{UF}{UN}$	→	On écrit la tangente de l'angle recherché.
$\tan \widehat{UNF} = \dfrac{5,5}{8,2}$ $\widehat{UNF} \approx 34°$.	→	On saisit 2nde ou SHIFT puis TAN⁻¹ TAN (5,5 ÷ 8,2).

À toi de jouer

7 Le triangle EXO est rectangle en X tel que EX = 3 cm et OE = 7 cm.
Calcule les valeurs arrondies au degré de la mesure des angles $\widehat{EOX}$ et $\widehat{XEO}$.

8 Le triangle JUS est rectangle en U. Calcule la valeur arrondie au degré de la mesure de l'angle $\widehat{UJS}$ sachant que UJ = 6,4 cm et US = 4,8 cm.

Méthode 4 : Utiliser les formules de trigonométrie

À connaître

Pour tout angle aigu $\widehat{A}$, $(\cos \widehat{A})^2 + (\sin \widehat{A})^2 = 1$ et $\tan \widehat{A} = \dfrac{\sin \widehat{A}}{\cos \widehat{A}}$.

Remarque : La première formule peut aussi s'écrire $\cos^2 \widehat{A} + \sin^2 \widehat{A} = 1$.

Exemple : Calcule la valeur exacte de $\sin \widehat{A}$ et $\tan \widehat{A}$ sachant que $\widehat{A}$ est un angle aigu tel que $\cos \widehat{A} = 0,8$.

- $\cos^2 \widehat{A} + \sin^2 \widehat{A} = 1$ donc $\sin^2 \widehat{A} = 1 - \cos^2 \widehat{A} = 1 - 0,8^2 = 1 - 0,64 = 0,36$.
  Le sinus d'un angle aigu est un nombre positif donc $\sin \widehat{A} = \sqrt{0,36} = 0,6$.
- $\tan \widehat{A} = \dfrac{\sin \widehat{A}}{\cos \widehat{A}} = \dfrac{0,6}{0,8} = 0,75$.

À toi de jouer

9 Calcule la valeur exacte de $\cos \widehat{B}$ et $\tan \widehat{B}$ sachant que $\widehat{B}$ est un angle aigu tel que $\sin \widehat{B} = \dfrac{5}{13}$.