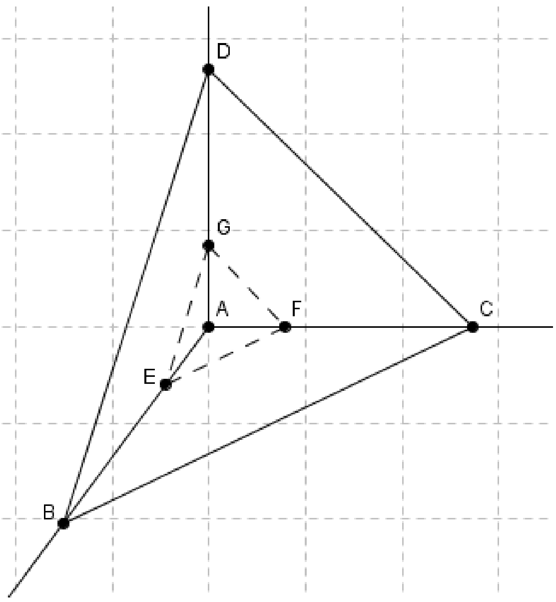
Lycée Ibn Khaldoun – Radès Mr ABIDI Farid	Devoir de synthèse n°2 Mathématiques (Mars 2009)	Classes : 4M 1-2 Durée : 4h

Exercice 1 : (3 points)

ABCD est un tétraèdre régulier d'arête 3. Soit E le point du segment [AB] tel que $AE = \frac{1}{3}AB$. On note (Q) le plan parallèle au plan (ABC) passant par E. (Q) coupe respectivement les droites (AB), (AC) en F et G .

L'espace est muni du repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG}\right)$.



1. Le volume du tétraèdre ABCD est :

a) 18 ; **b)** 9 ; **c)** $\frac{9}{2}$

2. L'expression analytique de l'homothétie h qui transforme le plan (ABC) en (EFG) est :

a) $\begin{cases} x' = \frac{x}{3} \\ y' = \frac{y}{3} \\ z' = \frac{z}{3} \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x' = \frac{x}{3} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x' = \frac{x}{3} \\ y' = \frac{y}{3} \\ z' = z \end{cases}$

3. L'expression analytique de la translation qui transforme le plan (ABC) en (MNP) est :

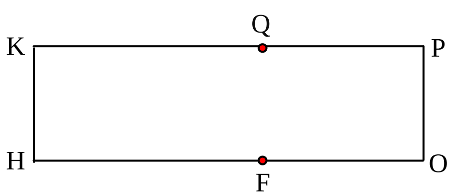
a) $\begin{cases} x' = x-2 \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x' = x-2 \\ y' = y-2 \\ z' = z-2 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x' = x \\ y' = y-2 \\ z' = z-2 \end{cases}$

Exercice 2 : (4 points)

1. Démontrer que $3^5 \equiv 1 \pmod{11}$.
2. En déduire que pour tout entiers q et r : $3^{5q+r} \equiv 3^r \pmod{11}$.
3. n étant un entier naturel, quels sont les restes possibles dans la division euclidienne de 3^n par 11 ?
4. Trouver pour quelles valeurs de n, $3^n + 7$ est divisible par 11.

Exercice 3: (6 points)

Dans le plan orienté, on considère le rectangle HOPK tel que OH = 10, OP = 3 et $\left(\widehat{\overrightarrow{HO}, \overrightarrow{HK}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. F et Q sont deux points respectivement sur les segments $[OH]$ et $[PK]$ tels que $OF = PQ = 4$.



Soit (E) l'ellipse de foyers O et F, de directrice
le droite (HK) associée à F et d'excentricité e.

A-

1) Déterminer le centre de (E) et prouver que $e = \frac{1}{2}$.
2) a- Prouver que les points P et Q appartiennent à (E).
   b- Déterminer les sommets principaux A et A' de (E).
3) Soit B l'un des sommets secondaires de (E).
   a- Prouver que le triangle OBF est équilatéral et placer B sur la figure.
   b- Tracer (E).

B-

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$ tel que $\overrightarrow{OF} = -4\vec{i}$ et $\overrightarrow{OP} = 3\vec{j}$.

1) Vérifier que $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ est l'équation réduite de (E).
2) Soit (D) la droite passant par P et de pente $-\frac{1}{2}$. Prouver que (D) est la tangent à (E) en P.
3) Ecrire une équation de la tangente (T) en Q à (E) et vérifier que H appartient à (T).
4) (D) coupent (T) en un point R et coupe l'axe focal de (E) en un point G.
   Calculer l'aire, en ua, de la partie du plan limité par les côtés du triangle RGH et l'arc AA' de l'ellipse (E) passant par B.

Exercice 4: (7 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x - \ln(1+x)}$

On note (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Montrer que pour tout x réel positif ou nul, on a $\int_0^x \frac{t}{1+t}dt = x - \ln(1+x)$.
   b) Justifier que pour tout réel $x \geq 0$, $x - \ln(1+x) \geq 0$.
   c) En déduire l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et en déduire la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.
3. On pose $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$.
   a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $0 \leq g'(x) \leq x^2$ où g' désigne la fonction dérivée de g.

b) En déduire que pour tout réel $x \geq 0$, $0 \leq g(x) \leq \frac{1}{3}x^3$

c) En déduire que pour tout $x \geq 0$, $\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \leq x - \ln(1+x) \leq \frac{x^2}{2}$

d) Calculer alors $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$.

e) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 .

4. Etudier le sens de variation de f.

5. Tracer (C_f) .

6. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégral $I = \int_0^{\frac{3}{2}} x\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x}{3}}\,dx$.

7. On désigne par A l'aire de la partie du plan délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \frac{3}{2}$.

   Montrer que $\frac{3\sqrt{2}}{10} \leq A \leq \frac{9\sqrt{2}}{16}$.

Corrigé

Exercice 1:

1. c) ; 2. a) ; 3. b)

Exercice 2

1. $3^5 = 243 = 22\times 11 + 1$ donc $3^5 \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,11)$.

2. On a: $3^5 \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,11)$ donc $\left(3^5\right)^q \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,11)$ d'où $3^{5q}\times 3^r \equiv 3^r\,(\mathrm{mod}\,11)$

   Ou encore $3^{5q+r} \equiv 3^r\,(\mathrm{mod}\,11)$.

3. Soit n un entier naturel, effectuons la division euclidienne de n par 5 et appelons q le quotient et r le reste, on a donc : $0 \le r < 5$.

   D'après la question précédente, le reste de la division euclidienne de 3^n par 11 est le même que celui de la division de 3^r par 11.
   - $3^0 = 1$ donc le reste dans la division de 3^{5q} par 11 est 1
   - $3^1 = 3$ donc le reste dans la division de 3^{5q+1} par 11 est 3
   - $3^2 = 9$ donc le reste dans la division de 3^{5q+2} par 11 est 9
   - $3^3 = 27 = 2\times 11 + 5$ donc le reste dans la division de 3^{5q+3} par 11 est 5
   - $3^4 = 81 = 7\times 11 + 4$ donc le reste dans la division de 3^{5q+4} par 11 est 4

4. $3^n + 7$ est divisible par 11 $\Leftrightarrow 3^n + 7 \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,11)$

$$\Leftrightarrow 3^n \equiv -7\,(\mathrm{mod}\,11)$$

$$\Leftrightarrow 3^n \equiv -7 + 11\,(\mathrm{mod}\,11)$$

$$\Leftrightarrow 3^n \equiv 4\,(\mathrm{mod}\,11)$$

$\Leftrightarrow$ le reste dans la division de 3^n par 11 est 4

D'après la question précédente, n est de la forme $5q + 4$ avec $q \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3

A-

1. O'est le milieu de $[OF]$, O' est le centre de l'ellipse (E) donc $2c = 4$ d'où $c = 2$, Or H est le Comme (HK) est la directrice de (E) associée au foyer F et H est le projeté orthogonal de F sur (HK) alors $O'H = \frac{a^2}{c} = 8$ d'où $a = 4$ donc $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.

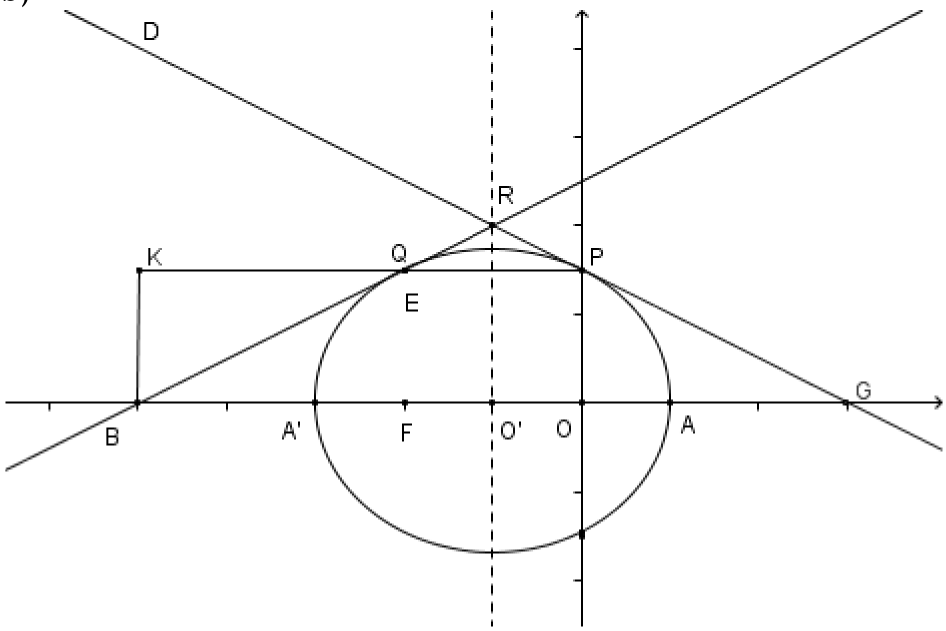
2. a) $PF^2 = PO^2 + OF^2 = 25$ donc PF = 5 d'où $\frac{\text{PF}}{\text{PK}} = \frac{5}{\text{OH}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ il en résulte que P $\in$ (E).

   D'autre part : $\frac{\text{QF}}{\text{QK}} = \frac{\text{OP}}{\text{OH} - \text{OF}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et par suite $Q \in$ (E).

   b) Les sommets principaux de (E) sont les points A et A' de l'ellipse (E) situés sur l'axe focal (OF) de (E) tels que O'A = O'A' = 4.

3. a) On sait que $c^2 = a^2 - b^2$ donc $b = 2\sqrt{3}$ et par suite $\tan\widehat{O'FB} = \sqrt{3}$. Il en résulte que $\widehat{O'FB} = \dfrac{\pi}{3}$ et puisque $BF = BO$ alors le triangle *OBF* est équilatéral.

b)



B-

1. Dans le repère $\left(O',\vec{i},\vec{j}\right)$, l'équation réduit de l'ellipse (E) est $\dfrac{X^2}{16} + \dfrac{Y^2}{12} = 1$.
   Comme O' est de coordonnées (-2, 0) alors (E) est d'équation dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$
   $\dfrac{(x+2)^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$.
2. (D) est la droite passant par P(0, 3) et de pente $\dfrac{1}{2}$ donc D : $y = -\dfrac{1}{2}x + 3$.

M est de coordonnées (x, y) dans $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ $\Leftrightarrow$ M est de coordonnées (X, Y) dans $\left(O',\vec{i},\vec{j}\right)$

avec $\begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x = X - 2 \\ y = Y \end{cases}$

	Dans le repère $\left(O',\vec{i},\vec{j}\right)$	Dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$
P	P(2, 3)	P(0, 3)
La tangente à (E) en P	$\dfrac{2X}{16} + \dfrac{3Y}{12} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{X}{8} + \dfrac{Y}{4} = 1$ $\Leftrightarrow Y = -\dfrac{1}{2}X + 4$	$y = -\dfrac{1}{2}(x+2) + 4 \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{2}x + 3$

Ainsi (D) est la tangente à l'ellipse (E) en P.

3.

	Dans le repère $\left(O',\vec{i},\vec{j}\right)$	Dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$
Q	P(-2, 3)	P(-4, 3)
La tangente à (E) en Q	$\frac{-2X}{16}+\frac{3Y}{12}=1 \Leftrightarrow -\frac{X}{8}+\frac{Y}{4}=1 \Leftrightarrow Y=\frac{1}{2}X+4$	$y=\frac{1}{2}(x+2)+4 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+5$

Une équation de (T) est $y=\frac{1}{2}x+5$.

On a : H(-10 ;0) et $y_H=\frac{1}{2}x_H+5$ donc $H\in(T)$.

4. Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection R des droites (T) et (D), on résout le système :

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+5 \\ y=-\frac{1}{2}x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ 2y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases} \quad \text{donc } R(-2, 4).$$

(D) coupe l'axe des abscisses au point G d'abscisse x_G telle que $-\frac{1}{2}x_G+3=0$ d'où $x_G=6$.

Ainsi G(6 ;0).

On a : $RH=\sqrt{(-10+2)^2+(0-4)^2}=\sqrt{64+16}=4\sqrt{5}$

Et : $R=\sqrt{(6+2)^2+(0-4)^2}=\sqrt{64+16}=4\sqrt{5}$

Donc HRG est un triangle isocèle de sommet principal R.

Exercice 4 :

1. a) Pour tout x réel positif ou nul,

$$\int_0^x \frac{t}{1+t}dt=\int_0^x\left(\frac{1+t-1}{1+t}\right)dt=\int_0^x\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=\left[t-\ln(1+t)\right]_0^x=x-\ln(1+x).$$

b) Pour tout réel $x\geq 0$ et pour tout t de $[0,x]$, on a $\frac{t}{1+t}\geq 0$ donc $\int_0^x\frac{t}{1+t}dt\geq 0$

D'où pour tout $x\geq 0$, $x-\ln(1+x)\geq 0$.

c) f(x) existe $\Leftrightarrow 1+x>0$ et $x-\ln(1+x)\geq 0 \Leftrightarrow x>-1$ et $x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$

Par suite : l'ensemble de définition de f est $[0,+\infty[$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln(1+x)}{1+x}.\frac{1+x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln(1+x)}{1+x}.\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=+\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x}\left(1-\frac{\ln(1+x)}{1+x}.\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}=0$ donc (C_f) admet une branche infinie de direction $\left(O,\vec{i}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

3.a) Pour tout $x \geq 0$, $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1-(1-x)(1+x)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$.

D'autre part, pour tout $x \geq 0$, $g'(x) - x^2 = \frac{x^2}{1+x} - x^2 = \frac{-x^3}{1+x} \leq 0$.

Par conséquent, pour tout $x \geq 0$, $0 \leq g'(x) \leq x^2$.

b) Pour tout réel $x \geq 0$ et pour tout t de $[0,x]$, on a $0 \leq g'(t) \leq t^2$ donc

$$0 \leq \int_0^x g'(t)dt \leq \int_0^x t^2 dt \Leftrightarrow 0 \leq g(x) - g(0) \leq \frac{1}{3}x^3 \Leftrightarrow 0 \leq g(x) \leq \frac{1}{3}x^3$$

c) D'où , pour tout réel $x \rhd 0$:

$$0 \leq \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^3}{3} \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) - x \leq \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \leq x - \ln(1+x) \leq \frac{x^2}{2}$$

d) On a pour tout x > 0, $\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \leq x - \ln(1+x) \leq \frac{x^2}{2}$ donc $\frac{1}{2} - \frac{x}{3} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$.

Comme $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2} - \frac{x}{3} = \frac{1}{2}$ alors $\lim_{x \to 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

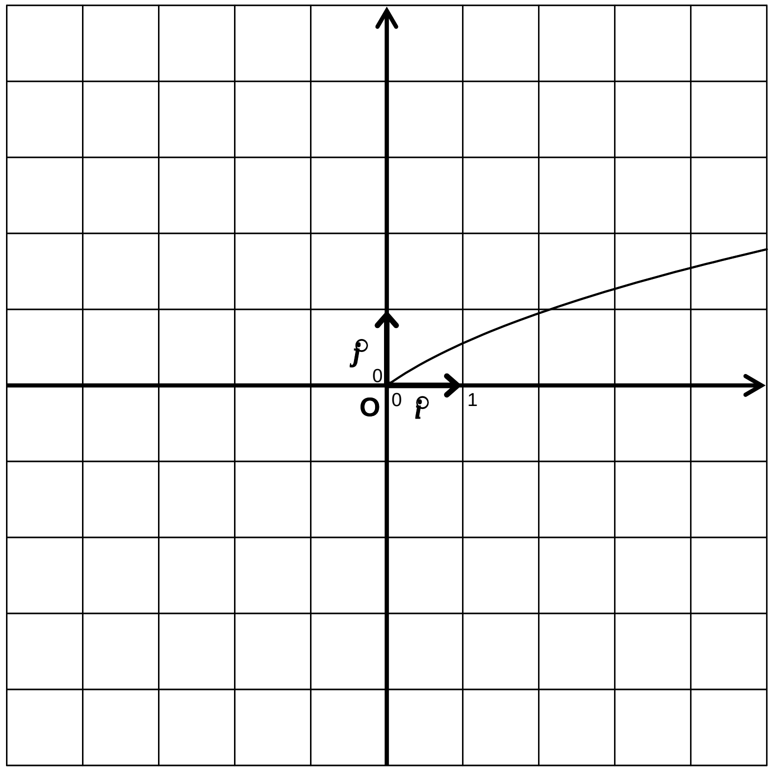
e) $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x - \ln(1+x)}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{\frac{x - \ln(1+x)}{x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. La fonction $x \mapsto x - \ln(1+x)$ est dérivable et strictement positive sur $]0,+\infty[$.

Pour tout x > 0 , $f'(x) = \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2\sqrt{x - \ln(1+x)}} = \frac{x}{2(1+x)\sqrt{x - \ln(1+x)}} > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

5. Le tableau de variation de f est :

x	0	$+\infty$
f'(x)	+	
f(x)	0 ↗	$+\infty$



6. Soit l'intégral $I = \int_0^{\frac{3}{2}} x\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{x}{3}}\,dx$.

On pose :

$u(x) = x \quad , \quad u'(x) = 1$

$v(x) = \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{x}{3}} = -3\left(-\frac{1}{3}\right)\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{x}{3}} \quad , \quad v(x) = -3\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{3}\right)\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{x}{3}} = -2\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{3}\right)\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{x}{3}}$.

On obtient :

$$I = \left[-2x\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{3}\right)\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{x}{3}}\right]_0^{\frac{3}{2}} + 2\int_0^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{3}\right)\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{x}{3}}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{x}{3}}\,dx - \frac{2}{3}\int_0^{\frac{3}{2}} x\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{x}{3}}\,dx$$

$$= \left[-2\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{3}\right)\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{x}{3}}\right]_0^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}I$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3}I$$

D'où $\frac{5}{3}I = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow I = \frac{3\sqrt{2}}{10}$

7. Comme pour tout $x \geq 0$, $\frac{1}{2} - \frac{x}{3} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$ alors $\sqrt{\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}} \leq f(x) \leq \sqrt{\frac{x^2}{2}}$ ou encore $x\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x}{3}} \leq f(x) \leq x\frac{\sqrt{2}}{2}$.

   Ainsi $\int_0^{\frac{3}{2}} x\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x}{3}}dx \leq \int_0^{\frac{3}{2}} f(x)dx \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{3}{2}} xdx \Leftrightarrow I \leq A \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{3}{2}}$.

   Par conséquent : $\frac{3\sqrt{2}}{10} \leq A \leq \frac{9\sqrt{2}}{16}$.