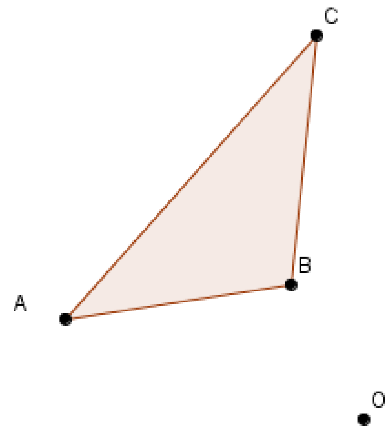
Rotation

Dans tout ce qui suit , le plan est supposé orienté dans le sens positif.

Exercice 1

Construire l'image du triangle ABC par la rotation

r de centre O, d'angle $\frac{2\pi}{3}$.



Exercice 2

On considère deux droites (D) et (D') sécantes en un point O. Soit A un point de D autre que O et A' un point (D') autre que O. On note M et M' deux points appartenant respectivement à (D) et (D') tel que AM = A'M′ .

On désigne par E, F, G et H les milieux respectifs de [AA'], [MM'], [AM'] et [A'M].

1. Montrer que EGFH est un parallélogramme.
2. Montrer qu'il existe une rotation unique r, telle que r(A) = A' et r(M) = M'.
   Préciser la position de son centre I.

Exercice 3

ABCD est un carré de sens direct et de centre O. Soit E le point extérieur à ce carré tel que le triangle CDE soit équilatéral. Soit F le point intérieur au carré tel que le triangle BCF soit équilatéral. Soit G le point tel que le triangle AGC soit équilatéral et que B soit intérieur à ce triangle.

1. Démontrer que les B, D et G sont alignés.
2. Donner une mesure de chacun des angles $\left(\overrightarrow{CG},\overrightarrow{CA}\right)$, $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}\right)$ et $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CF}\right)$.
3. En utilisant une rotation de centre C, déduire que les points A, E et F sont alignés.

Exercice 4

On considère deux droies perpendiculaires (Δ) et (Δ') et quatre points A, B, C et D tels que :

Rotation

A et C sur (Δ) , B et D sur (Δ') , AC = BD et $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On suppose que les segments [AC] et [BD] n'ont pas même milieu.

1. a) Justifier qu'il existe une rotation r_1 qui transforme D en A et B en C.
   Déterminer son angle θ_1 et construire sur la figure son centre Ω_1.
   b) Justifier qu'il existe une rotation r_2 qui transforme A en B et C en D.
   Déterminer son angle θ_2 et construire sur la figure son centre Ω_2.
2. On désigne par M le milieu du segment [AC] et N celui de [BD].
   Déterminer la nature du quadrilatère $\Omega_1 M \Omega_2 N$.

Exercice 5

Soit le triangle équiléral direct ABC, inscrit dans le cercle (Γ).

Soit M un point, disitincr de A et de C, situé sur l'arc $\overset{\frown}{BA}$ et soit le point I de [MB] tel que MI = MA

1. Montrer que le triangle AMI est équlatéral.
2. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
   a) Préciser r(B) et r(I).
   b) En déduire que : MA + MC = MB.

Exercice 6

Le triangle OAB est isocèle de sommet principal O et de sens direct .

Soit M un point variable sur le segment [AB] et différent des points A et B.

La parallèle à (OB) passant par M coupe (OA) en A'. La parallèle à (OA) passant par M coupe (OB) en B'.

1. Montrer que OA' = BB'.
2. a) Montrer qu'il existe une, et une seule rotation, r qui envoie O sur B et A' sur B'.
   Donner son angle.

   b) Montrer que r(A) = O. Préciser le centre Ω de r.

   c) Montrer que, pour tout M d u plan, la médiatrice de [A'B'] passe par un point fixe que l'on précisera.

Rotation : corrigé

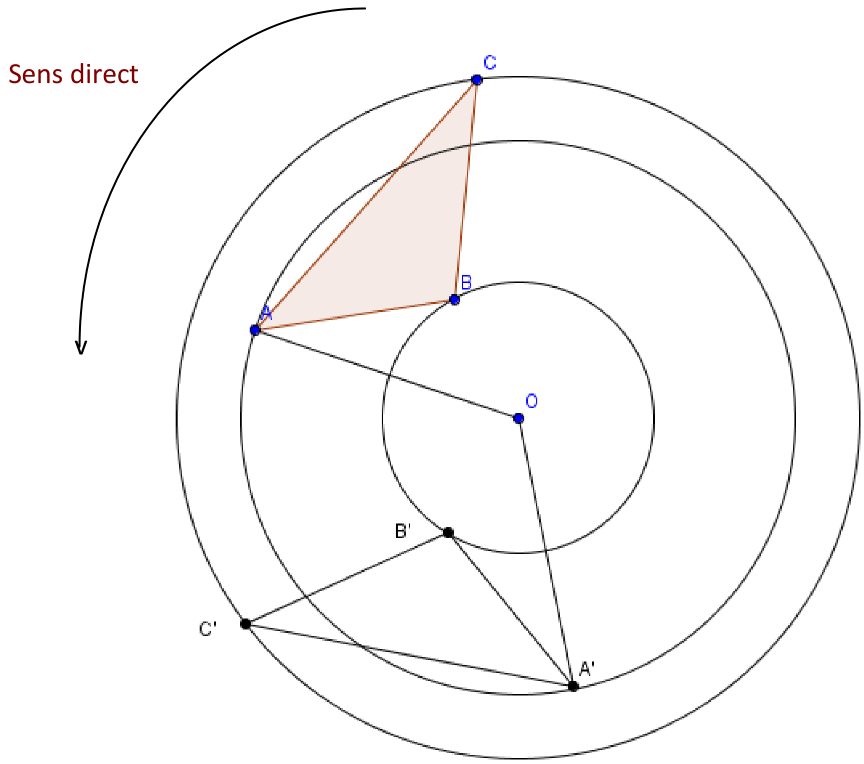
Exercice 1:

Soit les cercles (C $_A$) , (C $_B$) et (C $_C$) de centre O passant respectivement par les points A, B et C.

A' = r(A) est le point du cercle (C_A) telle que $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

B' = r(B) est le point du cercle (C_B) telle que $\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB'}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

C' = r(C) est le point du cercle (C_C) telle que $\left(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OC'}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.



Le triangle A'B'C', image du triangle ABC par la rotation r.

Rotation : corrigé

Exercice 2 :

1. E étant le milieu du segment [AA'] et G celui de [AM'] donc $EG = \frac{1}{2} A'M'$

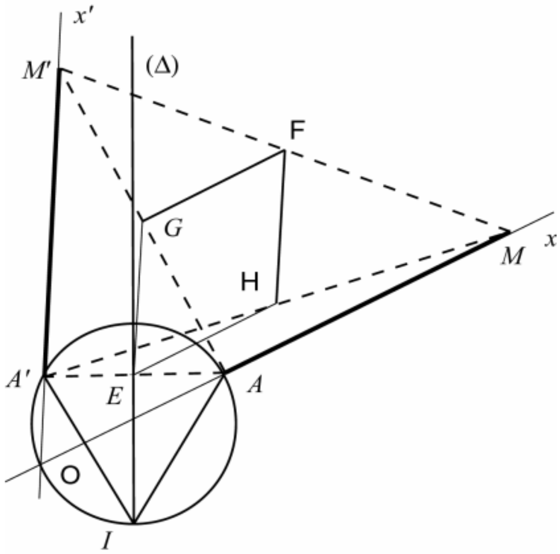
   H étant le milieu du segment [MA'] et F celui de [MM'] donc $HF = \frac{1}{2} A'M'$

   Il en résulte que : $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{HF}$ ou encore EFGH est un prallélogramme.

2. On a : AM = A'M' et $\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{A'M'}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}}\right)[2\pi]$ donc il existe une rotation r telle que : r(A) =A' et r(M) = M'.

   Soit $\theta \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}}\right)[2\pi]$, θ est une mesure de l'angle de r.

   Son centre I appartient à la médiatrice de [AA'] et à l'arc orienté $\overset{\frown}{AA'}$ du cercle circonscrit au triangle OAA'.



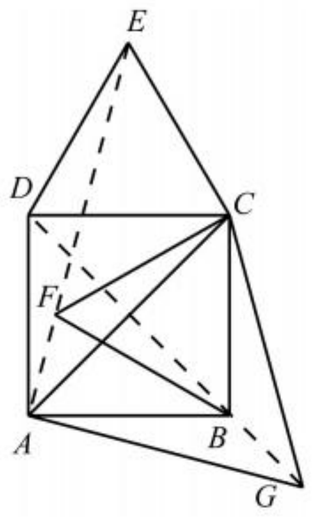
Rotation : corrigé

Exercice 3 :

1. AGC est un triangle équilatéral donc

C est un point équidistant des points A et C.

Les points B, D et G sont équidistants des points A et C. Donc B, D et G appartiennent tous les trois à la médiatrice de [AC] et donc les points B, D et G sont alignés.



2. Les triangles CAG, CED et CFB sont équilatéraux directs. Donc :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{CG},\overrightarrow{CA}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CF}}\right)[2\pi]$$
$$\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CF}}\right)[2\pi]$$
$$\equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$$

3. Soit r la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Les triangles CGA, CBF et CDE sont tous équilatéraux et de sens indirect.

On en déduit que : r(G) = A , r(B) = F et r(D) = E.

Or les points B, D et G sont alignés et r conserve l'alignement , donc A, F et E sont alignés.

Rotation : corrigé

Exercice 4 :

1. a) On a : AC = BD et $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc il existe un quart de tour direct

   r_1 qui envoie A sur B et C sur D.

   Le centre Ω_1 de r_1 est le point d'intersection des médiatrices des segments [AB] et [CD].

   b) De même : DB = AC et $\left(\widehat{\overrightarrow{DB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc il existe un quart de tour direct

   r_2 qui envoie D sur A et B sur C.

   Le centre Ω_2 de r_2 est le point d'intersection des médiatrices des segments [AD] et [CB].

2. M est milieu du segment [AC] donc $r_1(M)$ est milieu du segment $[r_1(A)r_1(C)]=[BD]$.

   Or N est le milieu du segment [BD] donc $r_1(M)=N$.

   N est milieu du segment [BD] donc $r_2(N)$ est milieu du segment $[r_2(B)r_2(D)]=[AC]$.

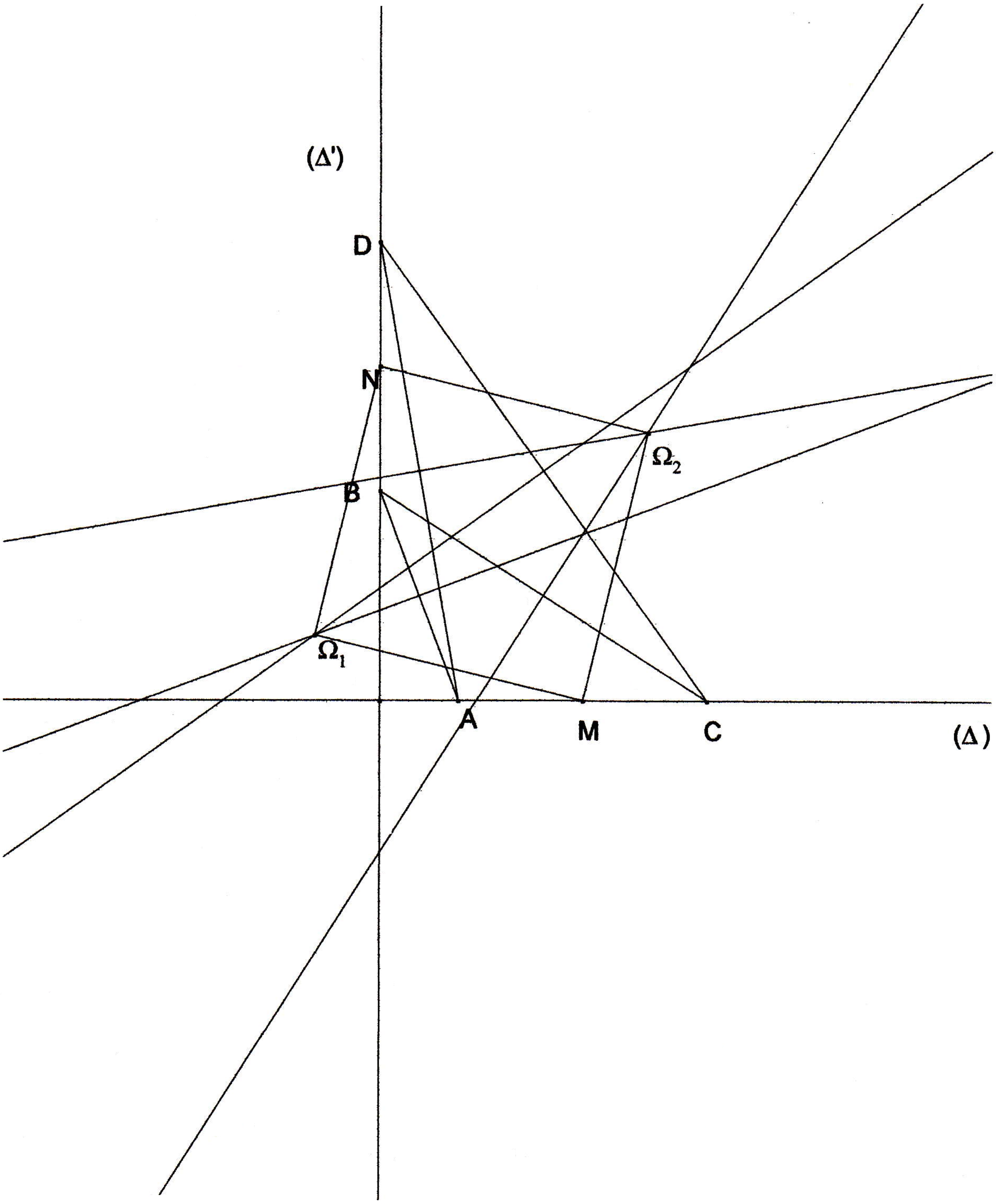
   Or M est le milieu du segment [AC] donc $r_2(N)=M$.

   $r_1(M)=N$ donc $\Omega_1M=\Omega_1N$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega_1M},\overrightarrow{\Omega_1N}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

   $r_2(N)=M$ donc $\Omega_2N=\Omega_2M$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega_2N},\overrightarrow{\Omega_2M}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

   Donc $\Omega_1M\Omega_2N$ est un carré.

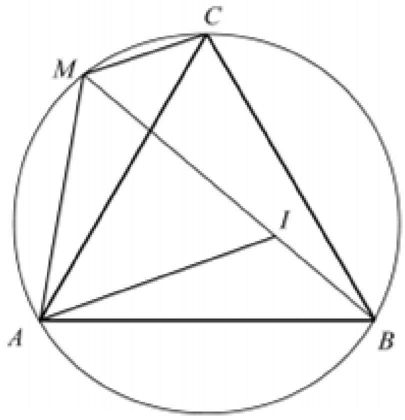
Rotation : corrigé



Rotation : corrigé

Exercice 5:

1. Les angles inscrits $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)$ et $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$ interceptent le même arc orienté $\overset{\frown}{BA}$ donc



$$\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)[2\pi]$$

$$\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$$

Or MI = MA donc IMA est un triangle équilatéral.

2. a) Les triangles IMA et ABC sont équilatéraux directs donc
r(I) = M et r(B) = C

b) De : r(I) = M et r(B) = C , on déduit que IB = MC.

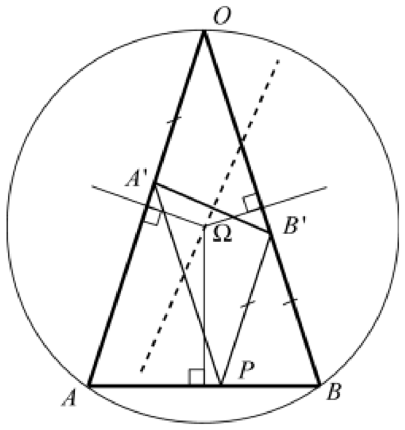
Par suite MA + MC = MI + IB.

Comme I appartient au segment [MB] alors MI + IB = MB , d'où MA + MC = MB.

Par suite MA + MC = MI + IB = MB.

Exercice 6 :

1. Les droites (AO) et (MB') sont parallèles , M est un point du segment [AB] et B' est un point du segment [BO] donc les triangles AOB et MB'B sont semblables (il existe une homothétie de centre B qui envoie A en M et O en B').



Or le triangle AOB est isocèle de sommet principal B donc le triangle MBB' est isocèle de sommet principal B d'où BM = BB'.

Or OA'MB' est un parallélogramme donc OA' = MB' d'où OA' = BB'.

Rotation : corrigé

2. a) Comme (OA’) et (BB’) ne sont pas parallèles, il existe une rotation unique r telle que r(O) = B et r(A’) = B’.

Soit θ une mesure de l’angle de r ,

$$\begin{aligned}\theta &\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{BB'}}\right)[2\pi]\\ &\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{BO}}\right)[2\pi]\\ &\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)+\pi\,[2\pi]\end{aligned}$$

On remarque que cet angle est indépendant des points A’ et B’ donc indépendant du point M.

Soit r(A) = A_1 est tel que OA = OB = BA_1 et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{BA_1}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{BO}}\right)[2\pi]$.

Par suite : r(A) = O .

b) On a : r(A) = O et r(O) = B , il résulte que le centre Ω de la rotation r est le point d’intersection des médiatrices des segments [OA] et [OB].

Ainsi Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle OAB.

c) Comme r(A’) = B’ alors la médiatrice du segment [A’B’] passe par Ω, qui est un point fixe.