

Exercice 1 : (4 points)

Dans le tableau suivant, à chaque question, une seule des réponses proposées est correcte.

Ecrire le numéro de la question et donner, **sans justification**, la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses			
		a	b	c	d
1	Si $\frac{\pi}{6}$ est un argument de z , alors un argument de $\frac{i}{z^2}$ est:	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$
2	Si $z = -\sqrt{3} + e^{i\frac{\pi}{6}}$, alors la forme exponentielle de z est:	$e^{\frac{5\pi}{6}i}$	$e^{\frac{7\pi}{6}i}$	$\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}i}$	$e^{-\frac{5\pi}{6}i}$
3	Si z et z' sont deux nombres complexes tels que $ z = 2$ et $z' = z - \frac{1}{z}$, alors $ z' =$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
4	Si z est un nombre complexe tel que $ z = \sqrt{2}$, alors $ \bar{z} + iz =$	$2\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice2 : (6 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne le point A d'affixe i . A tout point M du plan, distinct de A et d'affixe z , on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{i\bar{z}+1}{z+i}$.

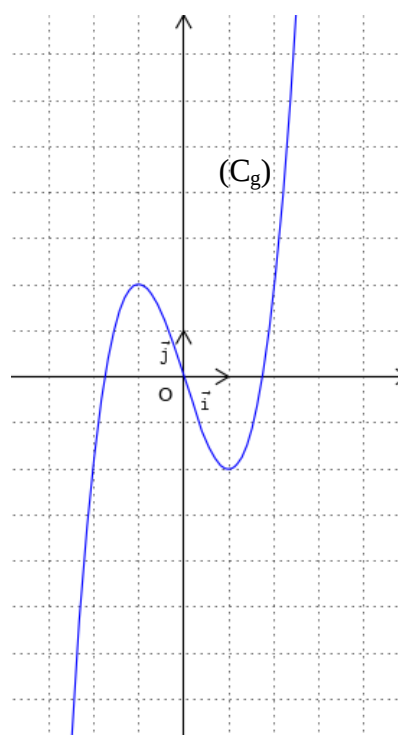
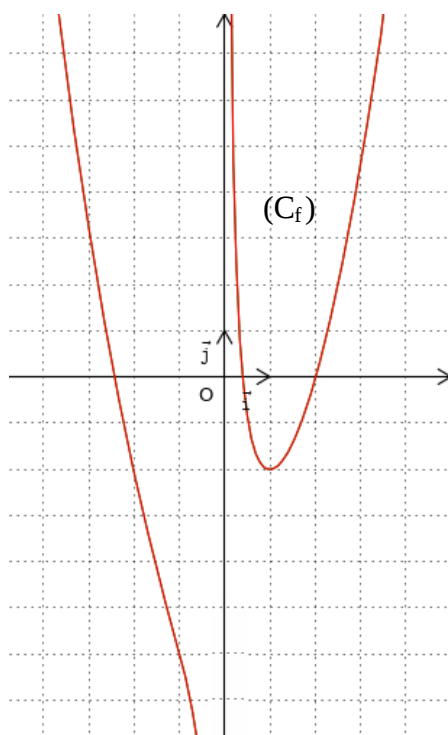
- Montrer que, lorsque M décrit l'axe réel, le point M' décrit le cercle trigonométrique ($\mathcal{C}$) de centre O.
- On pose $z = 1+i+e^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\pi, \pi[$ et on considère le point B d'affixe $1+i$.
 - Quelle est la courbe (Γ) décrite par le point M, d'affixe z , lorsque θ décrit $]-\pi, \pi[$?
 - Montrer que pour tout θ de $]-\pi, \pi[$, $z' - i = 1 + i \tan \frac{\theta}{2}$.
 - En déduire que $\overrightarrow{BM'} = \tan \frac{\theta}{2} \vec{v}$. A quelle courbe appartient le point M' ?

Exercice 3 : (5 points)

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont tracées chacune à part les courbes (C_f) et (C_g) représentatives des fonctions f et g . L'axe des abscisses est une asymptote à (C_f) .

Déterminer à l'aide des graphiques et en justifiant :

- $g \circ f([1, 2])$ et $f \circ g(]-\infty, -2])$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g \circ f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g \circ f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f \circ g(x)$

**Exercice 4: (5 points)**

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose $f_n(x) = x^3 - 2nx + 1$.

- Montrer que la fonction f_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$.
- Prouver que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution a_n dans $]0, 1[$.
- Vérifier que, pour tout entier $n \geq 2$, $f_{n+1}(a_n) = -2a_n$.
 - Montrer alors que la suite (a_n) est décroissante.
 - En déduire que la suite (a_n) est convergente.
- Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $a_n \leq \frac{1}{n}$.
 - Préciser la limite de la suite (a_n) .

Exercice 1 :

Question	Corrigé
1	$\arg\left(\frac{i}{\bar{z}^2}\right) \equiv \arg(i) - 2 \arg(\bar{z}) \quad [2\pi]$ $\equiv \frac{\pi}{2} - 2\left(-\frac{\pi}{6}\right) \quad [2\pi]$ $\equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$ $\equiv \frac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$ d
2	$z = -\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$ a
3	$z' = \frac{z\bar{z}-1}{\bar{z}} = \frac{ z ^2-1}{\bar{z}} = \frac{3}{\bar{z}} \quad \text{donc} \quad z' = \frac{3}{ z } = \frac{3}{2}$ c
4	$ \bar{z} + i\bar{z} = \bar{z}(1+i) = \bar{z} \times 1+i = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ b

Exercice 2 :

1. M décrit l'axe réel $\Leftrightarrow z$ est réel $\Leftrightarrow \bar{z} = z$ ainsi $|z'| = \left| \frac{i\bar{z}+1}{\bar{z}+i} \right| = \left| \frac{iz+1}{z+i} \right| = \frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{z^2+1}} = 1$

Il en résulte que , lorsque M décrit l'axe réel, $OM' = 1$ donc M' décrit le cercle trigonométrique ($\mathcal{C}$) de centre O.

2. On pose $z = 1+i+e^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\pi, \pi[$.

a) $z = 1+i+e^{i\theta} \Leftrightarrow z - (1+i) = e^{i\theta}$.

D'où : $|z - (1+i)| = 1 \Leftrightarrow BM = 1$ donc M appartient au cercle de centre B et de rayon 1.

D'autre part, $-\pi < \theta < \pi$, il en résulte que, lorsque θ décrit $]-\pi, \pi[$, l'ensemble des points est le cercle ($\mathcal{C}$) de centre B et de rayon 1 privé du point A.

b) Pour tout θ de $]-\pi, \pi[$,

$$\begin{aligned} z' - i &= \frac{\bar{iz} + 1}{z + i} - i = \frac{2}{z + i} = \frac{2}{1 + e^{-i\theta}} = \frac{2}{e^{-i\frac{\theta}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}} + \left(e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)^2} = \frac{2}{e^{-i\frac{\theta}{2}} \left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)} = \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\theta}{2}}} \\ &= \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} = 1 + i \tan \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

c) $-\pi < \theta < \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$.

Considérons la fonction f définie sur $]-\pi, \pi[$ par $f(\theta) = \tan \frac{\theta}{2}$;

f est dérivable sur $]-\pi, \pi[$ et pour tout θ de $]-\pi, \pi[$, $f'(\theta) = \frac{1}{2} \left[1 + \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] > 0$.

Il en résulte que f est continue et strictement croissante sur $]-\pi, \pi[$

d'où $f(]-\pi, \pi[) = \left] \lim_{\theta \rightarrow -\pi^+} f(\theta), \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} f(\theta) \right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ donc $\tan \frac{\theta}{2}$ décrit $\mathbb{R}$.

D'autre part $z' - i = 1 + i \tan \frac{\theta}{2} \Leftrightarrow z' - (1 + i) = i \tan \frac{\theta}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM'} = \tan \frac{\theta}{2} \vec{v}$.

On en déduit que M' appartient à la droite $(B, \vec{v})$

Exercice 3 :

1. On a : $f([1, 2]) = [-2, 0]$ et $g([-2, 0]) = [-2, 2]$ donc $g \circ f([1, 2]) = [-2, 2]$.

$g(]-\infty, -2]) =]-\infty, -2]$ et $f(]-\infty, -2]) = [-2, +\infty[$ donc $f \circ g(]-\infty, -2]) = [-2, +\infty[$.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} g \circ f(x) = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} g \circ f(x) = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f \circ g(x) = +\infty$.

Exercice 4:

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose $f_n(x) = x^3 - 2nx + 1$.

1. La fonction f_n étant une fonction polynôme donc f_n est dérivable sur $[0, 1]$.

Pour tout x de $[0, 1]$, $f'_n(x) = 3x^2 - 2n$.

Or $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow 3x^2 \leq 3 \Leftrightarrow f'_n(x) \leq 3 - 2n$;

d'autre part , $n \geq 2 \Leftrightarrow -2n \leq -4 \Leftrightarrow 3 - 2n \leq -1$ d'où $3 - 2n < 0$.

Par suite, pour tout x de $[0, 1]$, $f'_n(x) < 0$. Ainsi, f_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$.

2. f_n est continue et strictement décroissante sur $[0, 1]$.

$f_n(0) = 1$ et $f_n(1) = 2 - 2n$ et comme $n \geq 2$ alors $-2n \leq -4$ d'où $2 - 2n \leq -2$, on en déduit que $f_n(1) < 0$.

Il en résulte que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution a_n dans $]0, 1[$.

3. a) Pour tout entier $n \geq 2$,

$$f_{n+1}(a_n) = a_n^3 - 2(n+1)a_n + 1 = a_n^3 - 2na_n + 1 - 2a_n = f_n(a_n) - 2a_n = -2a_n.$$

b) Pour tout entier $n \geq 2$, $f_{n+1}(a_n) = -2a_n < 0$;

$$\text{or } f_{n+1}(a_{n+1}) = 0 \text{ donc } f_{n+1}(a_n) < f_{n+1}(a_{n+1}).$$

Comme f_{n+1} est strictement décroissante sur $[0, 1]$, nécessairement $a_n > a_{n+1}$.

(Sinon $a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow f_{n+1}(a_n) \geq f_{n+1}(a_{n+1})$ ce qui est absurde !)

Par conséquent, la suite (a_n) est décroissante.

c) La suite (a_n) est décroissante et minorée par 0 donc (a_n) est convergente.

4. a) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2,

$$f_n(a_n) = 0 \text{ et } f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3} - 2n \frac{1}{n} + 1 = \frac{1}{n^3} - 1 < 0 \text{ donc } f_n\left(\frac{1}{n}\right) < f_n(a_n).$$

Or f_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$ donc $a_n \leq \frac{1}{n}$

c) Pour tout $n \geq 2$, $0 < a_n \leq \frac{1}{n}$ et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.