Série : Fonction exponentielle

Exercice 1

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x}$.

1. Montrer que la suite u_n définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_0

2. Exprimer la somme $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ en fonction de n

3. Calculer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$

Exercice 2 :

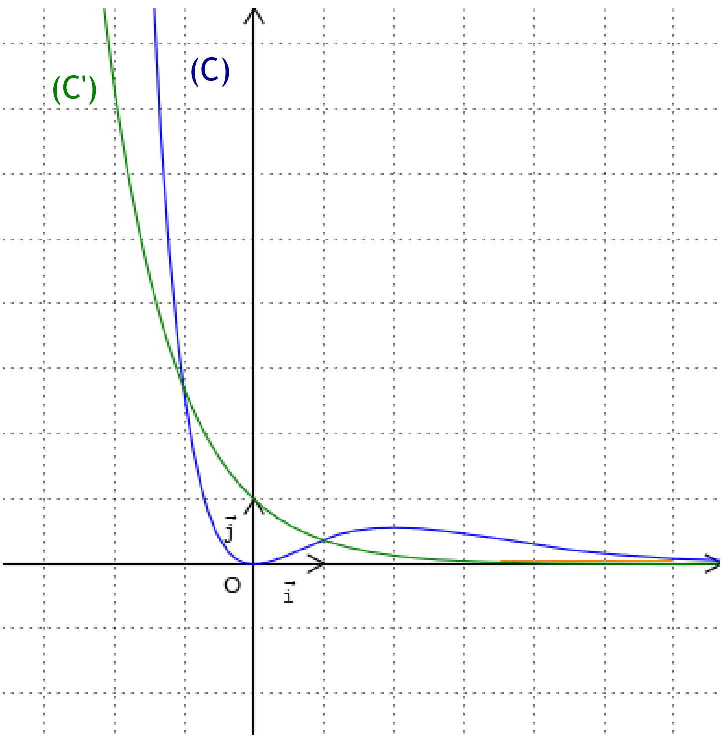
Pour x réel, on pose $f(x) = \ln(e^{2x} + e^{x} + 1)$. (C) est la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.
1. Justifier le fait que f est strictement croissante sur IR .
2. Montrer que la droite des abscisses est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.
3. a) Montrer que (C) admet une asymptote droite (D) au voisinage de $+\infty$.
   b) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

Exercice 3

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2e^{-x}$ et $g(x) = e^{-x}$.
On désigne par (C) et (C') les courbes représentant respectivement les fonctions f et g dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Etudier les variations de la fonction f .
   b) Étudier les positions relatives des courbes (C) et (C').

2. Les courbes (C) et (C') sont tracées ci-contre.



Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x^2 - 1)e^{-x}$.
Soit un réel α de $[1, +\infty[$.
On considère la partie du plan limitée par les courbes (C) et (C') et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

   a) Montrer que la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = (- x^2 -2x - 1)e^{-x}$ est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer l'aire $A(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, de cette partie du plan.
   c) Déterminer la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

Série : Fonction exponentielle

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x} - 2e^{-x} + 1$ et (C) sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et déduire une asymptote (D) à (C).
2. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement me résultat obtenu.
3. Trouver f '(x) et dresser le tableau de variations de f.
4. Démontrer que (C) admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.
5. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (C) avec son asymptote (D).
6. Tracer (D) et (C).

7. Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C) , son asymptote (D) et l'axe des ordonnées .
8. Soit g la fonction donnée par g(x) = ln(f(x)) , et (Γ) sa courbe représentative .

   a- Justifier que le domaine de définition de g est $]-\infty\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

   b- Démontrer que la droite (D) d'équation y = -2x est une asymptote à (Γ) .

   c- Résoudre chacune des équations g(x) = 0 et g(x) = -2x .

   d- Tracer (D) et (Γ) dans un autre repère

Série : Fonction exponentielle

Corrigé

Exercice 1

1. *On a , pour tout entier naturel n,* $u_n = f(n) = e^{-2n}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{-2(n+1)}}{e^{-2n}} = \frac{e^{-2n-2}}{e^{-2n}} = \frac{e^{-2n}e^{-2}}{e^{-2n}} = e^{-2}$$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison e^{-2} et de premier terme $u_0 = e^0 = 1$

2. $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \dfrac{1-(e^{-2})^{n+1}}{1-e^{-2}} = \dfrac{1-e^{-2n-2}}{1-e^{-2}}$

3. Comme $e^{-2} \in]-1,1[$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-2n} = 0$. *Ainsi* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{1-e^{-2}} = \dfrac{e^2}{e^2-1}$

Exercice 2

1. f est bien sur définie sur IR, car pour tout x réel, $e^{2x} + e^x + 1 > 0$.
De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $f'(x) = 2e^{2x} + e^x > 0$ donc f est strictement croissante sur IR.

2. On sait que : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} + e^x + 1 = 1$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.
La droite des abscisses est bien asymptote au (C) au voisinage de $-\infty$.

3. a) On a : pour tout x réel , $2x = \ln(e^{2x})$.
Donc : $f(x) = \ln(e^{2x} + e^x + 1) = \ln[e^{2x}(1 + e^{-x} + e^{-2x})] = \ln(e^{2x}) + \ln(1 + e^{-x} + e^{-2x}) = 2x + \ln(1 + e^{-x} + e^{-2x})$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} + e^{-x} + 1 = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1 + e^{-x} + e^{-2x}\right) = \ln 1 = 0$
Il en résulte que pour tout x réel , $f(x) = 2x + \ln(1 + e^{-x} + e^{-2x})$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1 + e^{-x} + e^{-2x}\right) = 0$, la droite (D) d'équation " $y = 2x$" est bien asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.
De plus, pour tout x réel, $1 + e^{-x} + e^{-2x} > 1$ car $e^{-x} + e^{-2x} > 0$, donc $\ln(1 + e^{-x} + e^{-2x}) > 0$
La droite (D) est donc en dessous de (C).

Exercice 3

1. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2}} = 0$.

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel,

$f'(x) = 2xe^{-x} + x^2\left(-e^{-x}\right) = \left(2x - x^2\right)e^{-x} = -x(x-2)e^{-x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *ou* $x = 2$.

Comme, pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ alors le signe de f(x) est celui de -x(x - 2).
Ainsi le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$4e^{-2}$	↘	0

Série : Fonction exponentielle

Corrigé

b) Pour étudier les positions relatives des courbes (C) et (Γ), il suffit d'étudier le signe de $f(x)$ - $g(x)$.

Pour tout x réel, $f(x)-g(x)=x^2e^{-x}-e^{-x}=(x^2-1)e^{-x}$

Cette différence est du signe du polynôme $(x^2 - 1)$ car $e^{-x} > 0$, pour tout x réel, ce qui donne comme tableau de signe :

Sur $]-\infty; -1] \cup [1 ; +\infty[$, la courbe (C) est au dessus de la courbe (Γ)
Sur $[-1 ; 1]$ la courbe la courbe (C) est au dessous de la courbe (Γ)

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x^2 - 1)e^{-x}$.

a) Pour tout réel x on a :

$H(x) = (-x^2 -2x - 1)e^{-x}$ donc

$H'(x) = (2x -2)e^{-x} - (-x^2 -2x - 1)e^{-x} = (-2x -2 + x^2 + 2x + 1)e^{-x} = (x^2 - 1)e^{-x} = h(x)$

donc H est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

b) Sur l'intervalle $[1 ; \alpha]$ la courbe (C) est au dessus de la courbe (Γ) (voir question 1) donc l'aire $A(\alpha)$ exprimée en unité d'aire est :

$$A(\alpha)=\int_1^{\alpha}(f(x)-g(x))dx=\int_1^{x}h(x)dx=\left[H(x)\right]_1^{\alpha}=H(\alpha)-H(1)=(-\alpha^2-\alpha-1)e^{-\alpha}+4e^{-1}.$$

c) On a : $A(\alpha)=(-\alpha^2-\alpha-1)e^{-\alpha}+4e^{-1}=-\alpha^2e^{-\alpha}-\alpha e^{-\alpha}-e^{-\alpha}+4e^{-1}$

Comme $\begin{cases}\lim\limits_{\alpha\to+\infty}-\alpha e^{-\alpha}=0\\ \lim\limits_{\alpha\to+\infty}e^{-\alpha}=0\\ \lim\limits_{\alpha\to+\infty}\alpha^2e^{-\alpha}=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}(-\alpha)^2e^{-\alpha}\end{cases}$ alors $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}A(\alpha)=4e^{-1}$

Exercice 3

1 . $f(x) = e^{-2x} - 2e^{-x} + 1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0+1=1$, la droite (d) d'équation y = 1 est une asymptote à (C) .

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}(e^{-x}-2+e^{x})=+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{e^{-2x}}{-x}.(1-2e^{x}+e^{2x})=-\infty$$

Donc (C) admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

3. Pour tout x réel , $f'(x) = -2e^{-2x} + 2e^{-x} = 2e^{-x}(1 - e^{-x})$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 1-e^{-x}=0\Leftrightarrow e^{-x}=1\Leftrightarrow -x=0\Leftrightarrow x=0$

$f'(x)$ est du signe de $1-e^{-x}$.

$f'(x)>0\Leftrightarrow 1-e^{-x}>0\Leftrightarrow e^{-x}<1\Leftrightarrow -x<0\Leftrightarrow x>0$.

Série : Fonction exponentielle

Corrigé

Il en résulte :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

4. $f''(x)$ = 4 e^{-2x} - 2 e^{-x} = 2 e^{-x} (2 e^{-x} - 1)

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2e^{-x}-1=0 \Leftrightarrow e^{-x}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{x}=2 \Leftrightarrow x=\ln 2\ ;$$

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow 2e^{-x}-1>0 \Leftrightarrow e^{-x}>\frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{x}<2 \Leftrightarrow x<\ln 2$$

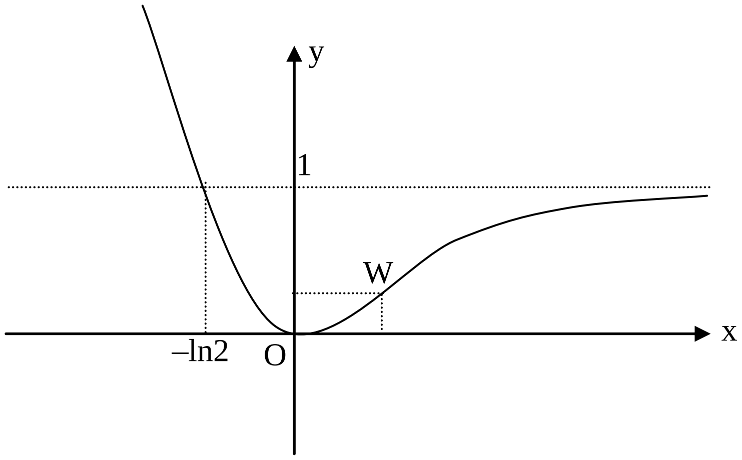
D'où f'' s'annule en $\ln 2$ en changeant de signe.

En plus f(ln2) = $e^{-2\ln 2}-2e^{-\ln 2}+1=e^{-\ln 4}-2e^{\ln\frac{1}{2}}+1=e^{\ln\frac{1}{4}}-2.\frac{1}{2}+1=\frac{1}{4}$.

Donc le point $\Omega(\ln 2\ ;\ \frac{1}{4})$ est un point d'inflexion de (C).

5. (C) coupe (D) $\Leftrightarrow$ e^{-2x} - 2 e^{-x} + 1 = 1 $\Leftrightarrow$ $e^{-x}(e^{-x}-2)=0$ $\Leftrightarrow$ $e^{-x}=2$ $\Leftrightarrow$ x = - ln2
Donc (C) coupe (D) en (- ln2 ; 1) .

6.



7. S = $\int_{-\ln 2}^{0}(1-f(x))dx=\int_{-\ln 2}^{0}(-e^{-2x}+2e^{-x})dx=\left[\frac{1}{2}e^{-2x}-2e^{-x}\right]_{-\ln 2}^{0}=\frac{1}{2}$.

8. a) g(x) = ln(f(x))
g est définie pour f(x) > 0 ce qui correspond à $D_g=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
g(x) = ln(f(x)) et ln est strictement croissante donc g et f varient dans le même sens.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	0

Série : Fonction exponentielle

Corrigé

►Ou $g'(x)\ \ \frac{f'(x)}{f(x)}$ donc g'(x) a même signe que f'(x) sur D_g.

En plus $\lim\limits_{x\,[illegible]} f(x)$ [illegible] *donc* $\lim\limits_{[illegible]} g(x)$ [illegible]

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

b) $g(x)-(-2x)=\ln(e^{-2x}-2e^{-x}+1)+\ln(e^{2x})=\ln(1-2e^{x}+e^{2x})$

$\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)+2x]=\ln 1=0$ donc (D') : y = 2x est une asymptote à (Γ) en $-\infty$.

c) g(x) = 0 $\Leftrightarrow$ ln(f(x)) = 0 $\Leftrightarrow$ f(x) = 1 $\Leftrightarrow$ x = - ln2.
g(x) = - 2x $\Leftrightarrow$ $\ln(1-2e^{x}+e^{2x})=0$ $\Leftrightarrow$ $-2e^{x}+e^{2x}=0$ $\Leftrightarrow$ $e^{x}=2$ $\Leftrightarrow$ x = ln2 .

d)