Congruence (1)

Exercice 1

1. Calculer le reste de la division par 11 de chacun des nombres $1,\ 4^1,\ 4^2,\ 4^3,\ 4^4,\ 4^5$.

2. Calculer le reste de la division par 11 de chacun des nombres $4^5, 4^{10}, 4^{15}, 4^{20}, 4^{25}, \ldots, 4^{5n}$.

3. Calculer le reste de la division par 11 de chacun des nombres $4^{5n},\ 4^{5n+1},\ 4^{5n+2},\ 4^{5n+3},\ 4^{5n+4}$.

4. Calculer le reste de la division par 11 de chacun des nombres $4^{304},\ 4^{732},\ 4^{877}$.

5. Calculer le reste de la division par 11 de chacun des nombres $11257^{304},\ 11257^{732},\ 11257^{877}$.

Exercice 2

Démontrer que, quel que soit l'entier naturel $n \geq 1$

1. $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7
2. $3^{2n} + 2^{6n-5}$ est divisible par 11
3. $3.5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17

Exercice 3

Si l'entier n n'est pas un multiple de 3,

$2^{2n} + 2^n + 1$ est divisible par 7

$3^{2n} + 3^n + 1$ est divisible par 13

$5^{2n} + 5^n + 1$ est divisible par 31

Exercice 4

Calculer le reste de la division de

$10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$ par 7

$10^{6n+4} + 10^{3n+2} + 1$ par 11

Exercice 5

Déterminer, pour $p = 1, 2, 3, 4$, les restes de la division de 5^p par 13.
En déduire, que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,
le nombre $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13.

Congruence (1)

Exercice 6

Montrer que :

Si un entier relatif x est solution de l'équation $x^2 + x \equiv 0 \pmod 6$

alors $x \equiv 0 \pmod 3$ ou $x \equiv 2 \pmod 3$

Exercice 7

1. Montrer que $5^0 \equiv 1 \pmod{13}$, $5^1 \equiv 5 \pmod{13}$, $5^2 \equiv -1 \pmod{13}$ et $5^3 \equiv -5 \pmod{13}$.

2. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $5^{4k} \equiv 1 \pmod{13}$, $5^{4k+1} \equiv 5 \pmod{13}$,

$5^{4k+2} \equiv -1 \pmod{13}$ et $5^{4k+3} \equiv -5 \pmod{13}$.

3. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $5^{2n} + 5^n \equiv 0 \pmod{13}$.

Exercice 8

n désigne un entier naturel

1. Etudier suivant les valeurs de n, le reste de la division euclidienne de 7^n par 9.

2. Démontrer que, quel que soit n, $7^n + 12n - 1$ est divisible par 9.

Exercice 9

1. Soit x un entier relatif. En discutant suivant les valeurs de x modolo 9, déterminer

le reste de la division euclidienne de x^3 par 9.

En déduire que pour tout entier relatif x, on a:

$x^3 = 0 \ (9) \Leftrightarrow x = 0 \pmod 3$

$x^3 = 1 \ (9) \Leftrightarrow x = 1 \pmod 3$

$x^3 = 8 \ (9) \Leftrightarrow x = 2 \pmod 3$

2. On considère trois entiers relatifs x, y et z tels que $x^3 + y^3 + z^3$ soit divisible par 9.

Démontrer que l'un des trois entiers x, y ou z est divisible par 3.

Congruence (1)

Exercice 10

On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation $x^2 - x + 4 = 0$

A. toutes les solutions sont des nombres pairs
B. il n'y a aucune solution
C. les solutions vérifient $x \equiv 2 \pmod 6$
D. les solutions vérifient $x \equiv 2 \pmod 6$ ou $x \equiv 5 \pmod 6$.

Exercice 11

On considère les deux nombres $n = 1789$ et $p = (1789)^{2009}$

On a alors:

A. $n \equiv 4 \pmod{17}$ et $p \equiv 0 \pmod{17}$

B. p est un nombre premier

C. $p \equiv 4 \pmod{17}$

D. $p \equiv 1 \pmod{17}$

Exercice 12

1. Soit n un entier naturel non nul
   a) Calculer pour $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, le reste de la division de 3^n par 7.
   b) Démontrer que, quel que soit l'entier naturel n, $3^{n+6} \equiv 3^n$ [7].
   c) De manière générale, comment peut-on calculer, pour tout entier naturel n, le reste de la division de 3^n par 7 ?
   d) En déduire le reste de la division de 3^{2003} par 7.
2. Soit $U_n = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1}$ où n est un entier supérieur à.2
   a) Montrer que si U_n est divisible par 7, alors $3^n \equiv 1$ [7].
   b) Réciproquement, montrer que si $3^n \equiv 1$ [7] alors $U_n \equiv 0$ [7].
   c) En déduire les valeurs de n telles que U_n soit divisible par 7.

Congruence (1) Corrigé

Exercice 1

1.

$4^0 \equiv 1 \pmod{11}$; $4^1 \equiv 4 \pmod{11}$; $4^2 \equiv 5 \pmod{11}$; $4^3 \equiv 9 \pmod{11}$;

$4^4 \equiv 3 \pmod{11}$; $4^5 \equiv 1 \pmod{11}$

2.

$4^5 \equiv 1 \pmod{11}$; $4^{10} = (4^5)^2$ et $4^{10} \equiv 1 \pmod{11}$; $4^{15} = (4^5)^3$ et $4^{15} \equiv 1 \pmod{11}$

plus généralement

Pour tout entier naturel n, $4^{5n} = (4^5)^n$ et $4^{5n} \equiv 1 \pmod{11}$

3.

$4^{5n} = (4^5)^n$ et $4^{5n} \equiv 1 \pmod{11}$

$4^{5n+1} = (4^5)^n.4$ et $4^{5n+1} \equiv 4 \pmod{11}$

$4^{5n+2} = (4^5)^n.4^2$ et $4^{5n+2} \equiv 5 \pmod{11}$

$4^{5n+3} = (4^5)^n.4^3$ et $4^{5n+3} \equiv 9 \pmod{11}$

$4^{5n+4} = (4^5)^n.4^4$ et $4^{5n+4} \equiv 3 \pmod{11}$

4.

$4^{304} = 4^{300}.4^4 = (4^5)^{60}.4^4$ ou $304 \equiv 4 \pmod{5}$ et $4^{304} \equiv 3 \pmod{11}$

$4^{732} = 4^{730}.4^2 = (4^5)^{146}.4^2$ ou $732 \equiv 2 \pmod{5}$ et $4^{732} \equiv 5 \pmod{11}$

$4^{877} = 4^{875}.4^2 = (4^5)^{175}.4^2$ ou $877 \equiv 2 \pmod{5}$ et $4^{877} \equiv 5 \pmod{11}$

5.

puisque $11257 = 1021.11 + 4$ alors $11257 \equiv 4 \pmod{11}$

et $(11257)^{304} \equiv 3 \pmod{11}$

$(11257)^{732} \equiv 5 \pmod{11}$

$(11257)^{877} \equiv 5 \pmod{11}$

Congruence (1) Corrigé

Exercice 2

1)

$3^0 \equiv 1 \pmod 7$ $\quad 2^0 \equiv 1 \pmod 7$

$3^1 \equiv 3 \pmod 7$ $\quad 2^1 \equiv 2 \pmod 7$

$3^2 \equiv 2 \pmod 7$ $\quad 2^2 \equiv 4 \pmod 7$

et donc $3^{2(n)} \equiv 2^n \pmod 7$

soit $3^{2n+1} = 3.\ 3^{2n}$ et $2^{n+2} = 4.\ 2^n$

ainsi $3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 2^n(3+4) \pmod 7$ donc $3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 0 \pmod 7$

2)

$3^0 \equiv 1 \pmod{11}$ $\quad 2^0 \equiv 1 \pmod{11}$

$3^1 \equiv 3 \pmod{11}$ $\quad 2^1 \equiv 2 \pmod{11}$

$3^2 \equiv 9 \pmod{11}$ $\quad 2^2 \equiv 4 \pmod{11}$

$2^3 \equiv 8 \pmod{11}$

$2^4 \equiv 5 \pmod{11}$

$2^5 \equiv 10 \pmod{11}$

$2^6 \equiv 9 \pmod{11}$

pour $n \geq 1$

$3^{2n} + 2^{6n-5} = 3^{2n} + 2^{6(n-1)+1}$

$3^{2n} + 2^{6n-5} \equiv 9^n + 9^{n-1}.2 \pmod{11}$

$\equiv 9^{n-1}(9+2) \pmod{11}$

$\equiv 0 \pmod{11}$

3)

$5^0 \equiv 1 \pmod{17}$ $\quad 2^0 \equiv 1 \pmod{17}$

$5^1 \equiv 5 \pmod{17}$ $\quad 2^1 \equiv 2 \pmod{17}$

$5^2 \equiv 8 \pmod{17}$ $\quad 2^2 \equiv 4 \pmod{17}$

$2^3 \equiv 8 \pmod{17}$

pour $n \geq 1$

$3x5^{2n-1} + 2^{3n-2} = 3x5^{2(n-1)+1} + 2^{3(n-1)+1} = 15x5^{2(n-1)} + 2x2^{3(n-1)}$

$3x5^{2n-1} + 2^{3n-2} \equiv 15x8^{n-1} + .2x8^{n-1} \pmod{17}$

$\equiv 8^{n-1}(15+2) \pmod{17}$

$\equiv 0 \pmod{17}$

Congruence (1) Corrigé

Exercice 3

On a $2^0 \equiv 1 \pmod 7$, $2^1 \equiv 2 \pmod 7$, $2^2 \equiv 4 \pmod 7$ et $2^3 \equiv 1 \pmod 7$

et les restes de la division par 7 des puissances de 2 se retrouvent de 3 en 3

d'où des congruences modulo 3.

Soit encore : tout nombre entier naturel s'écrit suivant l'une (et une seule) des 3 formes

$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod 3 & \text{ou } n = 3k \\ n \equiv 1 \pmod 3 & \text{ou } n = 3k+1 \\ n \equiv 2 \pmod 3 & \text{ou } n = 3k+2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 2^{3k} = (2^3)^k \equiv 1 \pmod 7 \\ 2^{3k+1} = 2.(2^3)^k \equiv 2 \pmod 7 \\ 2^{3k+2} = 2^2.(2^3)^k \equiv 4 \pmod 7 \end{cases}$$

- si $n \equiv 1 \pmod 3$ ou $n = 3k+1$

  alors $2^{2n} = 2^{2(3k+1)} = 2^2.(2^{3k})^2 \equiv 4 \pmod 7$

  $2^n = 2^{(3k+1)} = 2^1.(2^{3k}) \equiv 2 \pmod 7$

  si $n \equiv 1 \pmod 3$ ou $n = 3k+1$ alors $2^{2n} + 2^n + 1 \equiv 0 \pmod 7$

  et $2^{2n} + 2^n + 1$ est divisible par 7 si $n \equiv 1 \pmod 3$ ou $n = 3k+1$

- si $n \equiv 2 \pmod 3$ ou $n = 3k+2$

  alors $2^{2n} = 2^{2(3k+2)} = 2^1.(2^{3(2k+1)}) \equiv 2 \pmod 7$

  $2^n = 2^{(3k+2)} = 2^2.(2^{3k}) \equiv 4 \pmod 7$

  si $n \equiv 2 \pmod 3$ ou $n = 3k+2$ alors $2^{2n} + 2^n + 1 \equiv 0 \pmod 7$

  et $2^{2n} + 2^n + 1$ est divisible par 7 si $n \equiv 2 \pmod 3$ ou $n = 3k+2$

- si $n \equiv 0 \pmod 3$ ou $n = 3k$

  alors $2^{2n} = 2^{2(3k)} \equiv 1 \pmod 7$

  $2^n = 2^{(3k)} \equiv 1 \pmod 7$

  si $n \equiv 0 \pmod 3$ ou $n = 3k$ alors $2^{2n} + 2^n + 1 \equiv 3 \pmod 7$

  et $2^{2n} + 2^n + 1$ n'est pas divisible par 7 si $n \equiv 0 \pmod 3$ ou $n = 3k$

Congruence (1) Corrigé

$3^0 \equiv 1 \pmod{13}$

$3^1 \equiv 3 \pmod{13}$

$3^2 \equiv 9 \pmod{13}$

$3^3 \equiv 1 \pmod{13}$ et les restes de la division par 13 des puissances de 3 se retrouvent de 3 en 3 d'où des congruences modulo 3.

Soit encore : tout nombre entier naturel s'écrit

suivant l'une (et une seule) des 3 formes

$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod 3 & \text{ou } n = 3k \\ n \equiv 1 \pmod 3 & \text{ou } n = 3k+1 \\ n \equiv 2 \pmod 3 & \text{ou } n = 3k+2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 3^{3k} = (3^3)^k \equiv 1 \pmod{13} \\ 3^{3k+1} = 3.(3^3)^k \equiv 3 \pmod{13} \\ 3^{3k+2} = 3^2.(3^3)^k \equiv 9 \pmod{13} \end{cases}$$

- si $n \equiv 1 \pmod 3$ ou $n = 3k+1$

  alors $3^{2n} = 3^{2(3k+1)} = 3^2.(3^{3k})^2 \equiv 9 \pmod{13}$

  $3^n = 3^{(3k+1)} = 3^1.(3^{3k}) \equiv 3 \pmod{13}$

  si $n \equiv 1$ (mod 3 ou $n = 3k+1$ alors $3^{2n} + 3^n + 1 \equiv 0 \pmod{13}$

  et $2^{2n} + 2^n + 1$ est divisible par 13 si $n \equiv 1 \pmod 3$ ou $n = 3k+1$

- si $n \equiv 2 \pmod 3$ ou $n = 3k+2$

  alors $3^{2n} = 3^{2(3k+2)} = 3^1.(3^{3(2k+1)}) \equiv 3 \pmod{13}$

  $3^n = 3^{(3k+2)} = 3^2.(3^{3k}) \equiv 9 \pmod{13}$

  si $n \equiv 2 \pmod 3$ ou $n = 3k+2$ alors $3^{2n} + 3^n + 1 \equiv 0 \pmod{13}$

  et $3^{2n} + 3^n + 1$ est divisible par 13 si $n \equiv 2 \pmod 3$ ou $n = 3k+2$

- si $n \equiv 0 \pmod 3$ ou $n = 3k$

  alors $3^{2n} = 3^{2(3k)} \equiv 1 \pmod{13}$

  $3^n = 3^{(3k)} \equiv 1 \pmod{13}$

  si $n \equiv 0 \pmod 3$ ou $n = 3k$ alors $2^{2n} + 2^n + 1 \equiv 3 \pmod{13}$

  et $2^{2n} + 2^n + 1$ n'est pas divisible par 13 si $n \equiv 0 \pmod 3$ ou $n = 3k$

Même résultat avec $5^{2n} + 5^n + 1$ est divisible par 31

puisque

$5^0 \equiv 1 \pmod{31}$

$5^1 \equiv 2 \pmod{31}$

$5^2 \equiv 25 \pmod{31}$

$5^3 = 125 = 124 + 1$ ou $5^3 \equiv 1 \pmod{31}$

Congruence (1) Corrigé

Exercice 4

$10^0 \equiv 1 \quad (\text{mod } 7)$

$10^1 \equiv 3 \quad (\text{mod } 7)$

$10^2 \equiv 2 \quad (\text{mod } 7)$

$10^3 \equiv 6 \quad (\text{mod } 7) \quad$ ou $\quad 10^3 \equiv -1 \quad (\text{mod } 7)$

$10^4 \equiv 4 \quad (\text{mod } 7)$

$10^5 \equiv 5 \quad (\text{mod } 7)$

$10^6 \equiv 1 \quad (\text{mod } 7)$

Dans la division par 7 des poissances successives de 10 les restes se retrouvent de 6 en 6, d'où une congruence modulo 6.

$10^3 \equiv -1 \quad (\text{mod } 7)$

$10^{3n+1} = (10^3)^n.10 \Rightarrow 10^{3n+1} \equiv 3.(-1)^n \quad (\text{mod } 7)$

$10^{6n+2} = (10^{3n+1})^2 \Rightarrow 10^{6n+2} \equiv 2 \quad (\text{mod } 7)$

le reste de la division de $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$ par 11 est

$$\begin{cases} 6 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$10^0 \equiv 1 \quad (\text{mod } 11)$

$10^1 \equiv -1 \quad (\text{mod } 11)$

$10^2 \equiv 1 \quad (\text{mod } 11)$

Dans la division par 11 des poissances successives de 10 les restes se retrouvent de 2 en 2, d'où une congruence modulo 2.

$10^3 \equiv -1 \quad (\text{mod } 11)$

$10^{3n+2} = (10^3)^n.10^2 \Rightarrow 10^{3n+2} \equiv (-1)^n \quad (\text{mod } 11)$

$10^{6n+4} = (10^{3n+2})^2 \Rightarrow 10^{6n+4} \equiv 1 \quad (\text{mod } 11)$

le reste de la division de $10^{6n+4} + 10^{3n+2} + 1$ par 11 est

$$\begin{cases} 3 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Congruence (1) Corrigé

Exercice 5

On a les congruences modulo 13 suivantes :

$5^1 \equiv 5 \pmod{13}$

$5^2 \equiv 12 \pmod{13}$ ou $5^2 \equiv -1 \pmod{13}$

$5^3 \equiv 8 \pmod{13}$

$5^4 \equiv 1 \pmod{13}$

On retrouve les restes de 4 en 4 , donc une congruence modulo 4.

$5^{4n} \equiv 1 \pmod{13}$

$5^{4n+1} \equiv 5 \pmod{13}$

$5^{4n+2} \equiv 12 \pmod{13}$

$5^{4n+3} \equiv 8 \pmod{13}$ ou encore $5^{4(n-1)+3} \equiv 8 \pmod{13}$

puisque $31 \equiv 5 \pmod{13}$ et $18 \equiv 5 \pmod{13}$

alors

$N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1} \equiv 5^{4n+1} + 5^{4n-1} \pmod{13}$

mais aussi

$N \equiv 5^{4n+1} + 5^{4(n-1)+3} \pmod{13}$

soit

$N \equiv 5 + 8 \pmod{13}$ ou $N \equiv 0 \pmod{13}$

ce qui prouve que $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13

Exercice 6

$x \equiv 0 \pmod 6 \Rightarrow x^2 \equiv 0 \pmod 6 \Rightarrow x^2 + x \equiv 0 \pmod 6$

$x \equiv 1 \pmod 6 \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod 6 \Rightarrow x^2 + x \equiv 2 \pmod 6$

$x \equiv 2 \pmod 6 \Rightarrow x^2 \equiv 4 \pmod 6 \Rightarrow x^2 + x \equiv 0 \pmod 6$

$x \equiv 3 \pmod 6 \Rightarrow x^2 \equiv 3 \pmod 6 \Rightarrow x^2 + x \equiv 0 \pmod 6$

$x \equiv 4 \pmod 6 \Rightarrow x^2 \equiv 4 \pmod 6 \Rightarrow x^2 + x \equiv 2 \pmod 6$

$x \equiv 5 \pmod 6 \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod 6 \Rightarrow x^2 + x \equiv 0 \pmod 6$

Les solutions de l'équation $x^2 + x \equiv 0 \pmod 6$ sont donc

$x \equiv 0 \pmod 6$ ou $x \equiv 2 \pmod 6$ ou $x \equiv 3 \pmod 6$ ou $x \equiv 5 \pmod 6$

solutions que l'on peut aussi écrire $x \equiv 0 \pmod 3$ ou $x \equiv 2 \pmod 3$

Congruence (1) Corrigé

Exercice 7

1. $5^0 \equiv 1 \pmod{13}$ $5^1 \equiv 5 \pmod{13}$ $5^2 \equiv -1 \pmod{13}$ $5^3 \equiv -5 \pmod{13}$

$5^4 \equiv 1 \pmod{13}$

2. Dans la division par 13 des puissances successives de 5, les restes se retrouvent de 4 en 4 respectivement $1, 5, -1, -5, 1, \ldots\ldots$ d'où une congruence modulo 4 pour les restes des divisions par 13 des puissances successives de 4.

$$
\begin{array}{lll}
5^{4k} = (5^4)^k & \text{et } 5^{4k} \equiv 1 & \pmod{13} \\
5^{4k+1} = (5^4)^k.5^1 & \text{et } 5^{4k+1} \equiv 5 & \pmod{13} \\
5^{4k+2} = (5^4)^k.5^2 & \text{et } 5^{4k+2} \equiv -1 & \pmod{13} \\
5^{4k+3} = (5^4)^k.5^3 & \text{et } 5^{4k+3} \equiv -5 & \pmod{13}
\end{array}
$$

3. On doit étudier les 4 cas

- $n \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow 5^0 + 5^0 \equiv 2 \pmod 4$
- $n \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 5^2 + 5^1 \equiv 4 \pmod 4$
- $n \equiv 2 \pmod 4 \Rightarrow 5^4 + 5^2 \equiv 0 \pmod 4$
- $n \equiv 3 \pmod 4 \Rightarrow 5^6 + 5^3 \equiv -6 \pmod 4$

L'ensemble des entiers naturels n tels que $5^{2n} + 5^n = 0 \pmod{13}$ est donc $n \equiv 2 \pmod 4$

que l'on peut aussi écrire $n = 2 + 4k$ avec $k \in \mathbb{N}$

Exercice 8

1. $7^0 \equiv 1 \pmod 9$ $7^1 \equiv 7 \pmod 9$

$7^2 \equiv 4 \pmod 9$ $7^3 \equiv 1 \pmod 9$

Les restes des divisions de 7^n par 9 se retrouvent de 3 en 3, soit des congruences modulo 3.

$$
\begin{array}{ll}
n \equiv 0 \pmod 3 & \Rightarrow 7^{3k} \equiv 1 \pmod 9 \\
n \equiv 1 \pmod 3 & \Rightarrow 7^{3k+1} \equiv 7 \pmod 9 \qquad k \in \mathbb{N} \\
n \equiv 2 \pmod 3 & \Rightarrow 7^{3k+2} \equiv 4 \pmod 9
\end{array}
$$

Congruence (1) Corrigé

2) si $n \equiv 0 \pmod 3$ ou $n = 3k$

alors $7^n + 12n - 1 \equiv 1 + 12.3k - 1 \pmod 9$
$\equiv 9.4k \pmod 9$
$\equiv 0 \pmod 9$

si $n \equiv 1 \pmod 3$ ou $n = 3k + 1$

alors $7^n + 12n - 1 \equiv 7 + 12.(3k+1) - 1 \pmod 9$
$\equiv 9.(4k+2) \pmod 9$
$\equiv 0 \pmod 9$

si $n \equiv 2 \pmod 3$ ou $n = 3k + 2$

alors $7^n + 12n - 1 \equiv 4 + 12.(3k+2) - 1 \pmod 9$
$\equiv 9.(4k+3) \pmod 9$
$\equiv 0 \pmod 9$

Exercice 9

1. $x = 0 \pmod 9 \Rightarrow x^3 = 0 \pmod 9$
$x = 1 \pmod 9 \Rightarrow x^3 = 1 \pmod 9$
$x = 2 \pmod 9 \Rightarrow x^3 = 8 \pmod 9$
$x = 3 \pmod 9 \Rightarrow x^3 = 0 \pmod 9$
$x = 4 \pmod 9 \Rightarrow x^3 = 1 \pmod 9$
$x = 5 \pmod 9 \Rightarrow x^3 = 8 \pmod 9$
$x = 6 \pmod 9 \Rightarrow x^3 = 0 \pmod 9$
$x = 7 \pmod 9 \Rightarrow x^3 = 1 \pmod 9$
$x = 8 \pmod 9 \Rightarrow x^3 = 8 \pmod 9$

$x^3 \equiv 0 \pmod 9 \Leftrightarrow x \equiv 0 \pmod 9$ ou $x \equiv 3 \pmod 9$ ou $x \equiv 6 \pmod 9$
$\Leftrightarrow x \equiv 0 \pmod 3$

$x^3 \equiv 1 \pmod 9 \Leftrightarrow x \equiv 1 \pmod 9$ ou $x \equiv 4 \pmod 9$ ou $x \equiv 7 \pmod 9$
$\Leftrightarrow x \equiv 1 \pmod 3$

$x^3 \equiv 2 \pmod 9 \Leftrightarrow x \equiv 2 \pmod 9$ ou $x \equiv 5 \pmod 9$ ou $x \equiv 8 \pmod 9$
$\Leftrightarrow x \equiv 2 \pmod 3$

Congruence (1) Corrigé

2. Si l'on ne tient pas compte de l'ordre, on a l'un des 6 cas suivants:

i) $0+0+0 \equiv 0 \pmod 9$ ii) $0+0+1 \equiv 1 \pmod 9$

iii) $0+0+8 \equiv 8 \pmod 9$ iv) $0+1+1 \equiv 2 \pmod 9$

v) $0+1+8 \equiv 0 \pmod 9$ vi) $0+8+8 \equiv 7 \pmod 9$

pour que $x^3+y^3+z^3$ soit divisible par 9 $\left(x^3+y^3+z^3 \equiv 0 \pmod 9\right)$,

il faut se trouver dans le cas i) ou v)

soit $x \equiv 0 \pmod 9$ et $y \equiv 0 \pmod 9$ et $z \equiv 0 \pmod 9$

les trois nombres sont divisibles par 3 ou

soit $x \equiv 0 \pmod 9$ et $y \equiv 1 \pmod 9$ et $z \equiv 8 \pmod 9$

l'un des nombres est un multiple de 3,
le second est un multiple de 3 augmenté de 1,
le troisième est un multiple de 3 augmenté de 2

Exercice 10

si $x = 0 \pmod 6$ alors $0^2 - 0 + 4 \equiv 4 \pmod 6$
si $x = 1 \pmod 6$ alors $1^2 - 1 + 4 \equiv 4 \pmod 6$
si $x = 2 \pmod 6$ alors $2^2 - 2 + 4 \equiv 0 \pmod 6$
si $x = 3 \pmod 6$ alors $3^2 - 3 + 4 \equiv 4 \pmod 6$
si $x = 4 \pmod 6$ alors $4^2 - 4 + 4 \equiv 4 \pmod 6$
si $x = 5 \pmod 6$ alors $5^2 - 5 + 4 \equiv 0 \pmod 6$

Réponse D

les solutions vérifient $x \equiv 0 \pmod 6$ ou $x \equiv 5 \pmod 6$

Exercice 11

$n = 1789$ et $p = (1789)^{2009}$

$1789 \equiv 4 \pmod{17}$, $(1789)^2 \equiv -1 \pmod{17}$, $(1789)^3 \equiv -4 \pmod{17}$ et $(1789)^4 \equiv 1 \pmod{17}$

et donc une congruence modulo 4 pour les restes des divisions des puissances successives de 1789 dans la division par 17

puisque $2009 \equiv 1 \pmod 4$ alors $p = (1789)^{2009} \equiv 4 \pmod{17}$

Réponse D

Congruence (1) Corrigé

Exercice 12

1. Soit n un entier naturel non nul.

a) De proche en proche nous avons : $3^0 \equiv 1 \pmod 7$, $3^1 \equiv 3 \pmod 7$, $3^2 \equiv 2 \pmod 7$,

$3^3 \equiv 6 \pmod 7$, $3^4 \equiv 4 \pmod 7$, $3^5 \equiv 5 \pmod 7$.

b) Nous pouvons écrire $3^3 \equiv -1 \pmod 7$ donc $3^6 \equiv 1 \pmod 7$ et, par suite, quel que soit l'entier naturel n, $3^{n+6} \equiv 3^n \pmod 7$.

c) De manière générale, tout entier naturel n s'écrit $n = 6q + r$ où r appartient à $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ (division euclidienne de n par 6).

Alors quel que soit l'entier naturel n, $3^n \equiv 3^r \pmod 7$.

d) $2003 = (6 \times 333) + 5$ donc : $3^{2003} \equiv 3^5$ soit $3^{2003} \equiv 5 \pmod 7$.

2. Soit $U_n = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1}$ où n est un entier supérieur à 2.

a) U_n est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 3 donc : $2U_n = 3^n - 1$.

Si U_n est divisible par 7 il en est de même de $2U_n$ donc nous avons $3^n \equiv 1 \pmod 7$.

b) Réciproquement si $3^n \equiv 1 \pmod 7$ alors $2U_n \equiv 0 \pmod 7$. Or 7 est premier avec 2 donc d'aprés le théorème de Gauss, 7 divise U_n.

c) U_n est divisible par 7 si, et seulement si, $3^n \equiv 1 \pmod 7$ donc d'après la première question si, et seulement si, n est multiple de 6.