QCM : Suites réelles

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes et sont notées sur un point chacune.

Pour chaque question, il y a exactement au moins une proposition correcte.

Répondez à chaque question par Vrai ou Faux en justifiant la réponse.

1. Les suites suivantes donnée par leur terme gérénal sont convergentes :

a. $u_n = \dfrac{2^{2n}}{3^n}$, $n \geq 0$

b. $u_n = \dfrac{2n + (-1)^n \sqrt{n}}{n+1}$, $n \geq 0$

c. $u_n = n \sin\dfrac{1}{n}$, $n > 0$

2. On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) ayant, pour tout entier naturel n, les propriétés suivantes :

$$u_n \leq v_n \leq w_n, \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = -1, \quad \lim_{n\to+\infty} w_n = 1$$

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

b. La suite (u_n) est minorée.

c. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $-1 \leq v_n \leq 1$, .

3. Une suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - 2u_n = 2n+3$

On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = u_n + 2n + 7$

a. La suite (v_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n + 2n + 7$, est géométrique.

b. $v_0 + v_1 + ... + v_7 \geq 2008$

c. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_0 + u_1 + ... + u_n = 2^{n+4} - 8n^2 - 8n - 15$

4. Deux suites (x_n) et (y_n) sont définies pour $n > 0$ par les relations :

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n} \quad \text{et} \quad y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}$$

a. Les suites (x_n) et (y_n) sont toutes les deux croissantes.

b. $x_3 = \dfrac{19}{20}$ et $y_3 = \dfrac{37}{60}$

c. Les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

QCM : Suites réelles- Corrigé

1. a) Faux

En effet :

Pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{2^{2n}}{3^n} = \frac{4^n}{3^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n$.

Comme $\frac{4}{3} > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Il en résulte que la suite (u_n) n'est pas convergente.

b) Vrai

En effet :

Pour tout entier naturel n ,

$$-1 \le (-1)^n \le 1 \Leftrightarrow -\sqrt{n} \le (-1)^n \sqrt{n} \le \sqrt{n} \Leftrightarrow 2n - \sqrt{n} \le 2n + (-1)^n \sqrt{n} \le 2n + \sqrt{n}$$

Comme $n+1>0$, il en suit : $\frac{2n-\sqrt{n}}{n+1} \le u_n \le \frac{2n+\sqrt{n}}{n+1}$.

De $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n-\sqrt{n}}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2-\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}} = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+\sqrt{n}}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}} = 2$, on conclue

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$ ou encore la suite (u_n) est convergente.

c) Vrai

En effet : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n \sin\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$. Donc la suite (u_n) est convergente.

2. a) Faux

contre-exemple : si $v_n = 1 - \frac{1}{n}$ pour tout n non nul , on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$

D'autre part : $n \ge 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n} \le 1 \Leftrightarrow -1 \le -\frac{1}{n} < 0 \Leftrightarrow 0 \le v_n < 1$, d'où , pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $-1 \le v_n \le 1$.

b) Vrai

En effet :

la suite (u_n) est convergente donc (u_n) est bornée d'où (u_n) est minorée.

c) Faux

Contre-exemple :

Si pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = -1 + \frac{1}{n}$, $v_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ et $w_n = 1 + \frac{1}{n}$, on a : $u_n \le v_n \le w_n$ et pourtant $v_1 = 1 + \frac{1}{1^2} = 2$ et $v_2 = 1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}$. Donc pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n \notin [-1,1]$.

QCM : Suites réelles- Corrigé

3. a) Vrai

En effet :

Pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 2(n+1) + 7 = 2u_n + 2n + 3 + 2(n+1) + 9 = 2u_n + 4n + 14 = 2(u_n + 2n + 7) = 2v_n$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 2.

b) Vrai

En effet : $v_0 + v_1 + ... + v_7 = v_0 \dfrac{1-2^8}{1-2} = 255(u_0 + 7) = 2040$

donc $v_0 + v_1 + ... + v_7 \geq 2008$.

c) Faux

On a pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = v_n - (2n - 7)$

$$\begin{aligned} \text{donc} \quad u_0 + u_1 + ... + u_n &= v_0 + v_1 + ... + v_n - \sum_{k=0}^{n}(2n+7) \\ &= 8.\frac{1-2^{n+1}}{1-2} - \frac{(n+1)(7+2n+7)}{2} \\ &= 8\left[2^{n+1} - 1\right] - (n+1)(n+7) \\ &= 2^{n+3} - n^2 - 8n - 15 \end{aligned}$$

4. a) Faux

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{2(n+1)} - \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{n} = -\dfrac{3n+2}{n(2n+1)(2n+2)}$

Donc $x_{n+1} - x_n \leq 0$ d'où la suite (x_n) est décroissante.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $y_{n+1} - y_n = \dfrac{1}{2(n+1)} - \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)}$

Donc $y_{n+1} - y_n \geq 0$ d'où la suite (y_n) est croissante.

b) Vrai

En effet : $x_3 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{19}{20}$ et $y_3 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{37}{60}$.

c) Vrai.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $x_n - y_n = \dfrac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n - y_n = 0$.

Par ailleurs, on a (y_n) est croissante et (x_n) est décroissante donc les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.