
DEVOIR DE SYNTHÈSE N° 2

EPREUVE **MATHÉMATIQUES**

 Mr ABIDI Farid

Durée : 3 h

Date : 03-03-2010

EXERCICE 1 (3 points)

Chaque question admet une seule réponse exacte : a, b ou c. Pour chacune des questions indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. La primitive H de la fonction h définie pour tout réel x par $h(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ telle que $H(0) = -1$ est la fonction H définie pour tout réel x par :

a) $H(x) = \frac{1}{x^2+1} - 2$

b) $H(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{e}\right)$

c) $H(x) = \ln\left(\frac{e}{x^2+1}\right) - 2$

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On fait tourner autour de l'axe des abscisses

l'arc de la courbe (C) d'équation $y = \sqrt{x}$ constitué des points de (C) , d'abscisses comprises entre 0 et

1. Le solide ainsi engendré a pour volume :

a) $\frac{\pi}{2}$

b) π

c) 2π

3. Si A et B sont deux événements indépendants et si $p(A) = p(B) = 0,4$ alors :

a) $p(A \cap B) = 0,8$

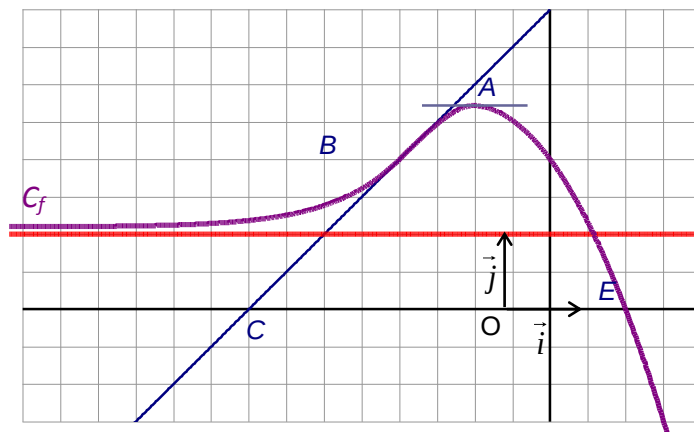
b) $p(A \cup B) = 0,64$

c) $p(A \cup B) = 0,8$

EXERCICE 2 (6 points)

Sur la figure ci-dessous, on a tracé la courbe représentative C_f d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Les points $E(1; 0)$, $A(-1; e)$ et $B(-2; 2)$ sont des points de C_f .
- La tangente à C_f en A est parallèle à l'axe des abscisses.
- La tangente à C_f en B passe par $C(-4; 0)$.
- La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à C_f en $-\infty$.
- La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty; -1]$ et strictement décroissante sur $[-1; +\infty[$.



1. a) Donner les valeurs de $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$ ainsi que la limite de f en $-\infty$.
 b) Donner, en justifiant vos réponses, les nombres $f'(-1)$ et $f'(-2)$.

2. On pose pour tout x réel, $g(x) = f'(x) \cdot f(x)$.

a) Déterminer $g'(x)$ pour tout x réel.

b) En déduire la valeur de l'intégrale : $\int_{-2}^{-1} [f''(x) \cdot f(x) + (f'(x))^2] dx$.

3. Soit h la fonction définie par $h(x) = \ln[f(x)]$ et C_h sa représentation graphique.

a) Déterminer l'intervalle I de définition de h . Calculer les limites de g aux bornes de I .

En déduire les asymptotes à la courbe C_h en précisant une équation pour chacune d'elles.

b) Exprimer $h'(x)$ à l'aide de $f(x)$ et $f'(x)$. En déduire le tableau de variations de h .

c) Déterminer $h(-2)$ et $h'(-2)$, puis une équation de la tangente à C_h au point B' d'abscisse -2 .

4. On pose pour tout entier naturel n , $U_n = \int_{-n-1}^{-n} h(x) dx$.

a) Donner une interprétation graphique de U_n .

b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $h(-n-1) \leq U_n \leq h(-n)$.

c) Montrer que la suite (U_n) est convergente et donner sa limite.

EXERCICE 3 (6 points)

On considère l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit les points $A(3, -2, 2)$, $B(6, 1, 5)$, $C(6, -2, -1)$ et $D(0, 4, -1)$.

1. Déterminer le produit vectoriel $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ et en déduire que les points A , B et C ne sont pas alignés.

2. a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A .

b) Déterminer le volume V du tétraèdre $ABCD$.

3. a) Ecrire une équation cartésienne du plan (P_1) perpendiculaire à la droite (AC) passant par A .

b) Vérifier que le plan (P_2) d'équation $x + y + z - 3 = 0$ est perpendiculaire à la droite (AB) et passe par A .

4. a) Ecrire une équation de la sphère (S) de centre B et de rayon $R = 5\sqrt{3}$.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $(L) = S \cap P_2$.

EXERCICE 4 (5 points)

L'urne A contient une boule rouge et trois boules vertes.

L'urne B contient deux boules rouges et deux noires.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1. On dispose aussi d'un dé, parfaitement équilibré, à six faces numérotée de 1 à 6.

On le lance une fois :

- ✓ s'il tombe sur une face dont le numéro est multiple de 3, on tire au hasard une boule de A ;
- ✓ sinon, on tire au hasard une boule de l'urne B.

- a) Calculer la probabilité de l'évènement N : « obtenir une boule noire ».
- b) Quelle est la couleur qui a la plus grande probabilité de sortir ?
- c) Quelle est la probabilité que la boule tirée provienne de B sachant qu'elle est rouge

2. On réunit toutes les boules dans une seule urne et on tire successivement trois boules que l'on pose à chaque fois devant l'urne.

a) Montrer que la probabilité de l'évènement E : « la troisième boule tirée est noire » vaut $\frac{1}{4}$.

b) Certains pensent que l'évènement F : « la première boule tirée est noire » a une probabilité supérieure à celle de l'évènement E.

Est-ce vrai ? Justifier.

CORRIGE**EXERCICE 1 :**1. **b)** ; 2. **a)** ; 3. **b)****EXERCICE 2 :**1. a) $f(-2) = 2$, $f(-1) = e$, $f(1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

b) Le nombre dérivé $f'(-1)$ est le coefficient de la tangente à la courbe C_f au point A . Or la tangente à C_f au point A est parallèle à l'axe des abscisses donc $f'(-1) = 0$.

Le nombre dérivé $f'(-2)$ est le coefficient de la tangente à la courbe C_f au point B . Or la tangente à C_f au point B(-2, 2) passe par le point C(-4, 0). Donc $f'(-2) = \frac{0-2}{-4-(-2)} = 1$.

2. On pose pour tout x réel, $g(x) = f'(x).f(x)$.a) Pour tout x réel, $g'(x) = f''(x).f(x) + (f'(x))^2$ b) $\int_{-2}^{-1} [f''(x).f(x) + (f'(x))^2] dx = [f'(x).f(x)]_{-2}^{-1} = f'(-1).f(-1) - f'(-2).f(-2) = -2$.

3.a) La courbe C_f traverse l'axe des abscisses au point E(1, 0) . D'autre part, C_f est au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $] -\infty, 1[$. Il en résulte que : pour tout x de $] -\infty, 1[$, $f(x) > 0$. Par suite, l'intervalle de définition de h est $I =] -\infty, 1[$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0 .$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0^+ \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty .$$

On en déduit :

- ✓ la droite des abscisses est asymptote à C_h au voisinage de $-\infty$.
- ✓ La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe C_h .

b) Pour tout x de I, $h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.Le signe de $h'(x)$ sur I est celui de $f'(x)$.

D'où le tableau de variations de g est :

x	$-\infty$	-1	1
$h'(x)$	+	0	-
h(x)	0	$\nearrow \ln e = 1$	$\searrow -\infty$

$$c) h(-2) = \ln[f(-2)] = \ln 2 \quad \text{et} \quad h'(-2) = \frac{f'(-2)}{f(2)} = \frac{1}{2}.$$

Une équation de la tangente à C_h au point B' d'abscisse -2 est :

$$y = h'(-2)(x+2) + h(2) = \frac{1}{2}(x+2) + \ln 2 = \frac{1}{2}x + 1 + \ln 2.$$

$$4. \text{ On pose pour tout entier naturel } n, U_n = \int_{-n-1}^{-n} h(x) dx.$$

a) Pour tout entier naturel n , la fonction h est continue et positive sur $[-n-1, -n]$ donc U_n est l'aire (en ua) de la partie du plan limitée par la courbe C_h , la droite des abscisses et les droites d'équations respectives $x = -n$ et $x = -n-1$.

b) Soit n un entier naturel, la fonction h est croissante sur $[-n-1, -n]$, il en résulte :

$$-n-1 \leq x \leq -n \Rightarrow h(-n-1) \leq h(x) \leq h(-n) \quad \text{donc} \quad h(-n-1) \int_{-2}^{-1} dx \leq \int_{-2}^{-1} h(x) dx \leq h(-n) \int_{-2}^{-1} dx$$

Ainsi, pour tout n de $\mathbb{N}$, $h(-n-1) \leq U_n \leq h(-n)$.

c) On a : pour tout n de $\mathbb{N}$, $h(-n-1) \leq U_n \leq h(-n)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(-n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h(-n-1) = 0$ donc la suite (U_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$.

EXERCICE 3

On considère l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit les points $A(3, -2, 2)$, $B(6, 1, 5)$, $C(6, -2, -1)$ et $D(0, 4, -1)$.

1. On a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -9 \\ 18 \\ -9 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ donc les points A , B et C ne sont pas alignés.

2. a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ et par suite le triangle ABC est rectangle en A .

b) Le volume V du tétraèdre $ABCD$ est $V = \frac{1}{6} \left| \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right) \cdot \overrightarrow{AD} \right| = \frac{1}{6} |27 + 108 + 27| = 27$.

3. a) Soit (P_1) le plan perpendiculaire à la droite (AC) passant par A .

$\vec{AC}$

est un vecteur normal à (P_1) donc $(P_1) : 3x - 3z + d = 0$ où d est un réel.

Or $A(3, -2, 2) \in (P_1)$, alors on obtient $d = -3$.

Il en résulte : $(P_1) : 3x - 3z - 3 = 0$ ou encore $(P_1) : x - z - 1 = 0$.

b) Soit (P_2) le plan d'équation $x + y + z - 3 = 0$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (P_2) . On

remarque : $\vec{AB} = 3\vec{n}$. Ce qui entraîne : (P_2) est perpendiculaire à la droite (AB) et passe par A .

4. a) Soit (S) la sphère de centre B et de rayon $R = 5\sqrt{3}$.

Une équation de (S) est : $(x - 6)^2 + (y - 1)^2 + (z - 5)^2 = 75$.

b) Soit $(L) = S \cap P_2$.

d B, P_2 $\frac{|6 - 1 - 5 + 3|}{\sqrt{3}} = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} < R$ donc (L) est un cercle de centre H et de rayon r tel que :

$r = \sqrt{R^2 - d(B, P_2)^2} = 4\sqrt{3}$ et $\vec{H} \in \vec{P}_2$ où $\vec{P}_2$ est la perpendiculaire au plan (P_2) passant par B .

On a : $\vec{B} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{H} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{(\vec{B} \cdot \vec{n})}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{12}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $H(3, -2, 2)$.

Il en résulte : $H(3, -2, 2)$.

Exercice 4 :

L'urne A contient une boule rouge et trois boules vertes.

L'urne B contient deux boules rouges et deux noires.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1. On note A l'évènement « on tire la boule de l'urne A », B l'évènement « on tire la boule de B »

N l'évènement « la boule tirée est noire », R l'évènement « la boule tirée est rouge »

V l'évènement « la boule tirée est verte ».

On en déduit : $p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $p(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

$$a) p(N) = p(N \cap A) + p(N \cap B) = p(A) \cdot p(N|A) + p(B) \cdot p(N|B) = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

$$b) p(R) = p(R \cap A) + p(R \cap B) = p(A) \cdot p(R|A) + p(B) \cdot p(R|B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}.$$

$$P(V) = p(V \cap A) + p(V \cap B) = p(A) \cdot p(V|A) + p(B) \cdot p(V|B) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times 0 = \frac{1}{4}.$$

On a ainsi : $P(R) > p(N) > p(V)$ donc la couleur qui a la plus grande probabilité de sortir est rouge.

$$c) p(B|R) = \frac{p(B \cap R)}{p(R)} = \frac{p(B) \times p(R|B)}{p(R)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{12}} = \frac{4}{5}.$$

2. On réunit toutes les boules dans une seule urne et on tire successivement trois boules que l'on pose à chaque fois devant l'urne. L'urne au départ contient 3 boules rouges, 3 boules vertes et 2 boules noires.

a) Soit l'évènement E : « la troisième boule tirée est noire ».

Les cas possibles	Leur probabilité :
La première est noire, la deuxième n'est pas noire et la troisième est noire	$\frac{2}{8} \times \frac{6}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{28}$
La première n'est pas noire, la deuxième est noire et la troisième est noire.	$\frac{6}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{28}$
La première et la deuxième boules ne pas noires, la troisième est noire	$\frac{6}{8} \times \frac{5}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{5}{28}$

$$\text{Donc } p(E) = 2 \times \frac{1}{28} + \frac{5}{28} = \frac{1}{4}.$$

b) La probabilité l'évènement F : « la première boule tirée est noire » est $p(F) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Donc $P(E) = p(F)$.

Non, les deux probabilités sont égales.