# Ecriture complexe d'une similitude

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

## Exercice 1

On considère, dans le plan complexe, les points A et B d'affixes respectives 3i et 6.

**Partie A**

1. Montrer qu'il existe une unique similitude directe f et une unique similitude indirecte g qui transforme A en O et O en B.
2. Déterminer l'écriture complexe de f.
3. Préciser les éléments caractéristiques de f.

**Partie B**

1. a) Montrer que l'écriture complexe de g est $z' = -2i\bar{z} + 6$.
   b) Déterminer l'affixe du centre $\Omega'$ de g.
2. a) Déterminer l'affixe du point A' image du A par l'homothétie de centre $\Omega'$ et de rapport 2.
   b) Préciser les éléments caractéristiques de g.

## Exercice 2

On se propose de caractériser la similitude indirecte f d'écriture complexe $z' = i\sqrt{2}\,\bar{z} + 2i\sqrt{2} - 2$.

**Partie A**

Soit g la similitude directe d'écriture complexe : $z' = i\sqrt{2}\,z + 2i\sqrt{2} - 2$.

1. Préciser le rapport, l'angle et l'affixe du centre $\Omega$ de g.
2. Déterminer une symétrie orthogonale s tel que $f = g \circ s$.

**Partie B**

1. Déterminer centre de f.
2. Soit $(\Delta)$ la droite d'équation $y = x + 2$.
   Montrer que pour tout point M de $(\Delta)$, le point $M' = f(M)$ appartient à $(\Delta)$.
3. On pose $h = f \circ S_\Delta$ où $S_\Delta$ désigne la symétrie orthogonale d'axe $(\Delta)$.
   a) Montrer que l'écriture complexe de $S_\Delta$ est $z' = i\bar{z} - 2 + 2i$.
   b) En déduire que l'écriture complexe de h est $z' = \sqrt{2}\,z + 2\sqrt{2} - 2$.
   c) Donner la nature de h et préciser ses éléments caractéristiques.
4. Déduire de ce qui précède le rapport et l'axe de f.

# Ecriture complexe d'une similitude

## Exercice 1

**Partie A**

1. On a : $A \neq O$, $OB = |z_B| = |6| = 6$ et $AO = |z_A| = |3i| = 3$ donc OB = 2 AO.

   Ainsi, il existe une unique similitude directe f et une unique similitude indirecte g qui transforme A en O et O en B.

2. L'écriture complexe de f est du type $z' = az + b$ avec a et b deux nombres complexes.

   $f(O) = B \Leftrightarrow a \times 0 + b = z_B \Leftrightarrow b = 6$

   et $f(A) = O \Leftrightarrow a \times z_A + b = 0 \Leftrightarrow 3ia + 6 = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{-6}{3i} \Leftrightarrow a = 2i$.

   Par suite , l'écriture complexe de f est $z' = 2iz + 6$.

3. On sait que le rapport de f est $|2i| = 2$ et qu'une mesure de l'angle de f est un argument de 2i d'où $\dfrac{\pi}{2}$ est une mesure de l'angle de f.

   Le centre de f est le point $\Omega$ d'affixe $\dfrac{b}{1-a} = \dfrac{6}{1-2i} = \dfrac{6(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \dfrac{6}{5} + \dfrac{12}{5}i$.

**Partie B**

1. a) L'écriture complexe de g est du type $z' = a\bar{z} + b$, où a et b sont deux nombres complexes .

   $g(O) = B \Leftrightarrow a \times \bar{0} + b = z_B \Leftrightarrow b = 6$

   et $g(A) = O \Leftrightarrow a \times \overline{z_A} + b = 0 \Leftrightarrow -3ia + 6 = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{6}{3i} \Leftrightarrow a = -2i$.

   Par suite, l'écriture complexe de g est $z' = -2i\bar{z} + 6$.

   b) Posons z = x + iy, où x et y sont réels.

   $$z' = z \Leftrightarrow -2i\bar{z} + 6 = z \Leftrightarrow -2i(x - iy) + 6 = x + iy \Leftrightarrow (x + 2y - 6) + i(2x + y) = 0$$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 6 = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 6 = 0 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$$

   Donc le centre de g est le point $\Omega'$ d'affixe $-2 + 4i$.

2. a) A' est l'image de A par l'homothétie de centre $\Omega'$ et de rapport 2 équivaut à

$$\overrightarrow{\Omega'A'} = 2\overrightarrow{\Omega'A} \Leftrightarrow z_{A'} - z_{\Omega'} = 2(z_A - z_\Omega) \Leftrightarrow z_{A'} = 2z_A - z_{\Omega'} \Leftrightarrow z_{A'} = 6i - (-2 + 4i) \Leftrightarrow z_{A'} = 2 + 2i$$

   b) g est une similitude indirecte de centre $\Omega'$ d'affixe $-2 + 4i$ et de rapport $|-2i| = 2$.

   L'axe ( $\Delta$ ) de g est l'ensemble des points M d'image $M'$ par g tels que $\overrightarrow{\Omega'M'} = 2\overrightarrow{\Omega'M}$

   Posons z = x + iy et $z' = x' + iy'$ où x, y, $x'$ et $y'$ sont réels :

# Ecriture complexe d'une similitude

$$z'-(-2+4i)=2\left[z-(-2+4i)\right]\Leftrightarrow -2i\bar{z}+6-(-2+4i)=2z+4-8i$$

$$\Leftrightarrow -2i\bar{z}+8-4i=2z+4-8i \quad \Leftrightarrow \quad 2z+2i\bar{z}-4-4i=0\Leftrightarrow z+i\bar{z}-2-2i=0$$

$$\Leftrightarrow (x+iy)+i(x-iy)-2-2i=0 \quad \Leftrightarrow \quad x+y-2+i(x+y-2)=0\Leftrightarrow x+y-2=0$$

Ainsi une équation de $(\Delta)$ est $x+y-2=0$.

## Exercice 2

**Partie A**

Soit g la similitude directe d'écriture complexe : $z'=i\sqrt{2}\,\bar{z}+2i\sqrt{2}-2$.

1. Le rapport de g est $\left|i\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}$.

   L'angle de g est un argument de $i\sqrt{2}$ et comme $\arg\left(i\sqrt{2}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ alors g est d'angle $\frac{\pi}{2}$.

   Le centre de g est le point $\Omega$ d'affixe $z_{\Omega}=\dfrac{-2+2i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{2}}=\dfrac{-2\left(1-i\sqrt{2}\right)}{1-i\sqrt{2}}=-2$.

2. Remarquons que : $z'=i\sqrt{2}\,\bar{z}+2i\sqrt{2}-2=i\sqrt{2}\left(\bar{z}\right)+2i\sqrt{2}-2$

   Donc, on a : $M(z)\overset{s}{\mapsto}M_1\left(\bar{z}\right)\overset{g}{\mapsto}M'(z')$

   Et par suite s est la symétrie orthogonale d'axe $\left(O,\vec{u}\right)$ telle que $f=g\circ s$.

**Partie B**

1. Posons z = x + iy, où x et y sont réels.

   $$z'=z\Leftrightarrow i\sqrt{2}\,\bar{z}+2i\sqrt{2}-2=z\Leftrightarrow i\sqrt{2}\,x+\sqrt{2}y+2i\sqrt{2}-2=x+iy$$

   $$\Leftrightarrow x-y\sqrt{2}+2+i\left(-x\sqrt{2}+y-2\sqrt{2}\right)=0$$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y\sqrt{2}+2=0 \\ -x\sqrt{2}+y-2\sqrt{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y\sqrt{2}-2 \\ -\sqrt{2}\left(y\sqrt{2}-2\right)+y-2\sqrt{2}=0 \end{cases}$$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y\sqrt{2}-2 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$$

   Donc $\Omega(-2)$ est le centre de f.

2. M(z) appartient à la droite $\Delta: y=x+2 \Leftrightarrow z=x+i(x+2)$, x est réel.

   Donc l'affixe de $M'=f(M)$ est

## Ecriture complexe d'une similitude

$z' = i\sqrt{2}\,\bar{z} + 2i\sqrt{2} - 2 = i\sqrt{2}\left(x - i(x+2)\right) + 2i\sqrt{2} - 2 = \left(x\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2\right) + i\left(x\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\right)$

En posant $z' = x' + iy'$ avec $x'$ et $y'$ réels, on obtient :

$$\begin{cases} x' = x\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2 \\ y' = x\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow y' - x' = 2 \Leftrightarrow y' = x' + 2 \quad \text{donc} \quad M' \in (\Delta).$$

3. On pose $h = f \circ S_\Delta$ où $S_\Delta$ désigne la symétrie orthogonale d'axe $(\Delta)$.

   a) On sait que l'écriture de $S_\Delta$ est du type $z' = a\bar{z} + b$ avec a et b sont deux nombres complexes tels que $|a| = 1$.

   Les points A(-2) et $B(2i)$ sont deux points distincts de la droite $(\Delta)$ et donc sont invariants par $S_\Delta$. Il en résulte que :

$$\begin{cases} a\overline{(-2)} + b = -2 \\ a\overline{(2i)} + b = 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = -2 \\ -2i\,a + b = 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-2i)a = 2 + 2i \\ b = -2 + 2a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-i)a = 1 + i \\ b = -2 + 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = (1+i)^2 \\ b = -2 + 2a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2i \\ b = -2 + 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = i \\ b = -2 + 2i \end{cases}$$

   Ainsi, l'écriture complexe de $S_\Delta$ est $z' = i\bar{z} - 2 + 2i$.

   b) On a : $M(z) \overset{S_\Delta}{\longmapsto} M'(z) \overset{f}{\longmapsto} M''(z'')$

   Avec $z' = i\bar{z} - 2 + 2i$ et $z'' = i\sqrt{2}\,\bar{z'} + 2i\sqrt{2} - 2 = i\sqrt{2}\left(\overline{i\bar{z} - 2 + 2i}\right) + 2i\sqrt{2} - 2$

$$= i\sqrt{2}\left(-iz - 2 - 2i\right) + 2i\sqrt{2} - 2 \quad = \sqrt{2}\,z + 2\sqrt{2} - 2$$

   Par suite, l'écriture complexe de h est $z' = \sqrt{2}\,z + 2\sqrt{2} - 2$.

   c) h est l'homothétie de rapport $\sqrt{2}$ et de centre $\Omega(-2)$.

4. $f \circ S_\Delta = h \Leftrightarrow f = h \circ S_\Delta$. Il en résulte que f est donc la composée d'une homothétie de rapport $\sqrt{2}$ et de centre $\Omega(-2)$ et d'une symétrie orthogonale d'axe $\Delta : y = x + 2$ passant par $\Omega(-2)$.

   On en déduit que $\Delta : y = x + 2$ est l'axe de f.