Lycée IBN KHALDOUN Radès Mr ABIDI Farid	Devoir de synthèse n°3 $4^{ème}$ M_{1-2} Bac Blanc 2011	Durée : 4 heures Coef. : 4

Le sujet comporte 4 page numérotées de 1/4 à 4/4

Exercice 1 : (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{3x-2}=$

   a) 1 ; **b)** e^{12} ; **c)** $+\infty$

2. La fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a pour tout x > 0 :

   a) $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}2^{\frac{1}{x}}$; **b)** $f'(x)=\dfrac{\ln 2}{x^2}2^{\frac{1}{x}}$; **c)** $f'(x)=-\dfrac{\ln 2}{x^2}2^{\frac{1}{x}}$

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\ln 2}} 2^x\left(1+2^x\right)dx=$

   a) $\dfrac{(e-1)(e+3)}{2\ln 2}$; **b)** $-\dfrac{e}{2\ln 2}$; **c)** e^2+2e

Exercice 2 : (3 points)

1. (X, Y) est une série statistique double. Soit (D) la droite de régression de Y en X et (D') la droite de régression de X en Y. On suppose que $D: y=ax+b$ et $D': x=a'y+b'$.
Soit r le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.
Etablir $a.a'=r^2$.

2. Dans une entreprise, une étude simultanée portant sur deux caractères X et Y donnent les résultats suivants :
   - la droite de régression de Y en X a pour équation : $2,4.x-y=0$
   - la droite de régression de X en Y a pour équation : $3,5.y-9x+24=0$.

   a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y, sachant que leur covariance est positive.

   b) Calculer la moyenne $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ de chacun des caractères X et Y.

Exercice 3: (4 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On donne les points A(1, - 2, 4) , B(- 2 , - 6, 5) et C(- 4, 0, - 3).

1. a) Démonter que les points A , B et C déterminent un plan (P) dont une équation cartésienne est $x-y-z+1=0$.

   b) A tout réel α, on associe le point $M(2\alpha, \alpha, \alpha)$.

   Montrer que MABC est un tétraèdre dont le volume est indépendant de α.

2. a) Ecrire une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par O et orthogonale à (P).

   b) Déterminer les coordonnées du point O' , projeté orthogonal de O sur (P).

3. On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur le droite (BC) .

   Soit t le réel tel que $\overrightarrow{BH} = t.\overrightarrow{BC}$.

   a) Démontrer que $t = \dfrac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}}{BC^2}$.

   b) En déduire le réel t et les coordonnées du point H.

4. Soit (S) la sphère de centre O et tangente en H à la droite (BC) et (S') la sphère de centre O et tangente au plan (P) en O'.

   Caractériser l'homothétie h qui transforme (S) en (S').

Exercice 4: (4 points)

1. Soit n un entier naturel non nul et A , B les entiers naturels définis par :
   $A = 11n+3$ et $B = 13n-1$.

Démontrer que tout diviseur commun de A et B est un diviseur de 50.

2. Soit (E) l'équation $50x-11y=1$ où x et y sont deux entiers naturels non nuls.

Déterminer une solution particulière de (E).

3. Soit (E') l'équation $50x-11y=3$ où x et y sont deux entiers naturels non nuls.
   a) Résoudre l'équation (E').
   b) En déduire les valeurs de n pour lesquelles $A \wedge B = 50$.
4. Pour quelles valeurs de n , $A \wedge B = 25$?

Exercice 5 : (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Montrer que pour tout réel x non nul, $\frac{e^x - 1}{x} > 0$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) , & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

   a) Montrer que f est continue en 0.

   b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ puis déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

3. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   a) Montrer que pour tout x réel non nul, $f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}$.

   b) Les courbes (C_1) et (C_2) en annexe à la page 4/4 représentent les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x$ et $h(x) = e^x - 1$. (C_2) est celle tracée en pointillés .
   Identifier la représentations graphique de chacune des fonctions g et h.
   Donner graphiquement le signe de g(x) – h(x) .
   En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout x réel non nul 0.

   c) Vérifier que , pour tout réel x , $f(x) - x = f(-x)$.
   En déduire le signe de f(x) – x pour tout x de $]0, +\infty[$ puis , montrer que $f'(0) = \frac{1}{2}$.

   c) Dresser le tableau de variations de f.

4. On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 > 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

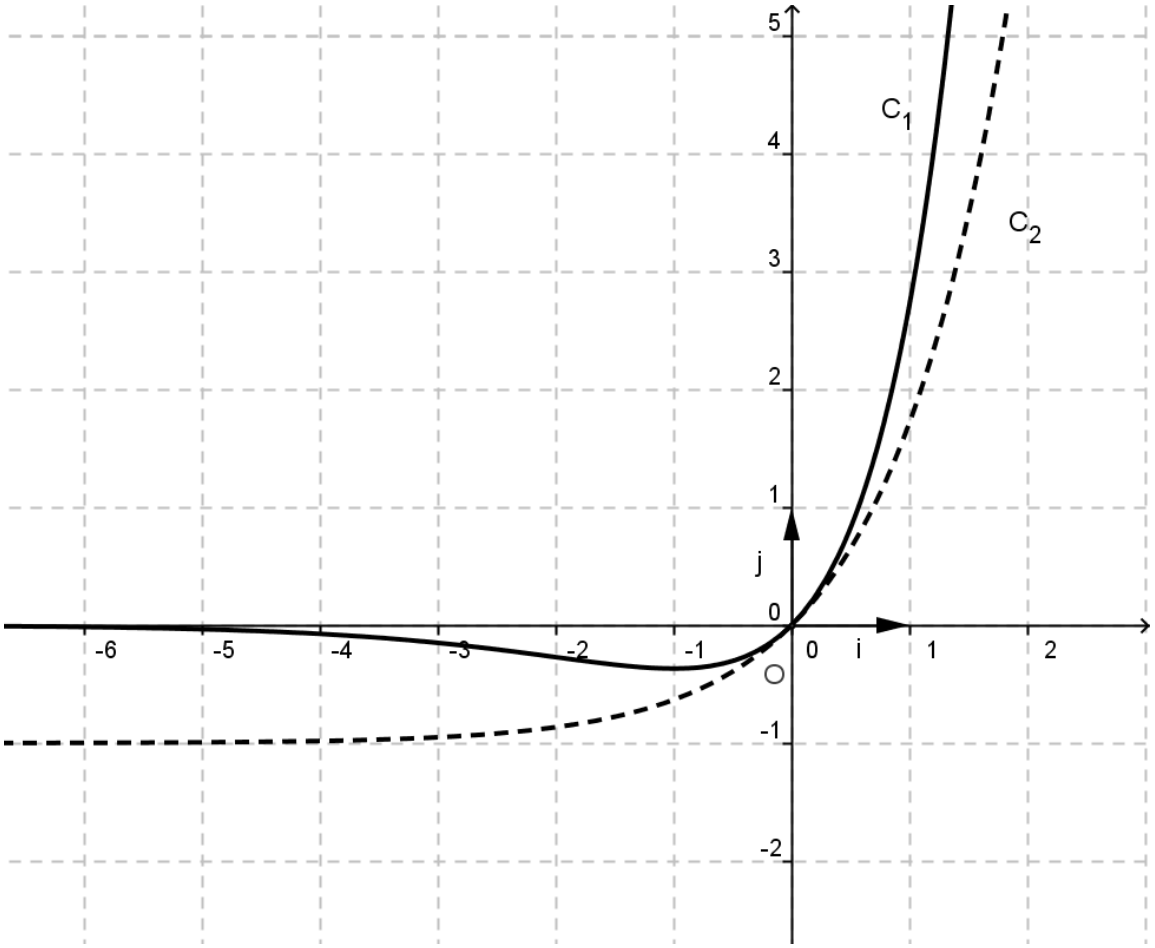
   a) Montrer que pour tout entier n , $u_n > 0$.

   b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante (on utilisera la question 2.c)

   c) En déduire que (u_n) converge et préciser sa limite.

   d) On pose pour tout entier naturel n, v_n la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0, u_n]$.
   Montrer que pour tout entier n, $0 \leq v_n \leq u_n$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

Annexe :



CORRIGE

Exercice 1 :

1. **b** ; 2. **c** ; 3. **a**

Exercice 2 :

1. La droite de régression (D) de Y en X a pour équation y = a x + b avec

$a = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$.

La droite de régression (D') de X en Y a pour équation y = a' x + b' avec

$a' = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{V(Y)}$ et $b' = \overline{X} - a'\overline{Y}$.

On en déduit que :

$$a.a' = \frac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)}.\frac{\text{cov}(X,Y)}{V(Y)} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma^2(X)}.\frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma^2(Y)} = \left(\frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma(X).\sigma(Y)}\right)^2 = r^2.$$

2. a) On a : D : y = 2,4.x et D' : $x = \dfrac{3,5}{9}y + \dfrac{24}{9}$ donc a = 2,4 et $a' = \dfrac{3,5}{9}$.

IL en résulte : $r^2 = a.a' = 2,4.\dfrac{3,5}{9} = \dfrac{14}{15}$.

Puisque cov(X, Y) > 0 alors r > 0 et suite $r = \sqrt{\dfrac{14}{15}}$.

b) On a : $\begin{cases} -a\overline{X} + \overline{Y} = b \\ \overline{X} - a'\overline{Y} = b' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a\overline{X} + \overline{Y} = b \\ a\overline{X} - aa'\overline{Y} = ab' \end{cases} \Rightarrow (1 - aa')\overline{Y} = b + ab'$

d'où $\overline{Y} = \dfrac{b + ab'}{1 - r^2} = 15.2,4.\dfrac{24}{9} = 96$.

Et $2,4.\overline{X} = \overline{Y} \Leftrightarrow \overline{X} = \dfrac{1}{2,4}.\overline{Y} \Leftrightarrow \overline{X} = 40$.

Exercice 3 :

1. a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\2\\-7\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}26\\-26\\-26\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires d'où les points A, B et C ne sont pas alignés et par suite A , B et C déterminent un plan (P).

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{n}=\frac{1}{26}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (P).

Il en résulte qu'une équation cartésienne de (P) est $x-y-z+d=0$, $d\in\mathbb{R}$.
Comme A(1, -2, 4) est un point de (P) alors $1+2-4+d=0$ d'où $d=1$.
Ainsi , une équation cartésienne de (P) est : $x-y-z+1=0$.

b) Pour tout réel α , $2\alpha-\alpha-\alpha+1=1\neq 0$ donc $M(2\alpha,\alpha,\alpha)\notin(P)$ donc les points M, A , B et C ne sont coplanaires d'où MABC est un tétraèdre.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}2\alpha-1\\\alpha+2\\\alpha-4\end{pmatrix}$ donc le volume du tétraèdre est :

$V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\right|=\frac{26}{6}\left|(2\alpha-1)-(\alpha+2)-(\alpha-4)\right|=\frac{13}{3}$.

2. a) la droite (Δ) passant par O est orthogonale au plan (P) est la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ donc une représentation paramétrique de cette droite est

$$\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=-t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

b) Le point O' est le point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (P).

D'où il existe un réel t tel que $O'(t,-t,-t)$.

$O'(t,-t,-t)\in(P)\Leftrightarrow t+t+t+1=0\Leftrightarrow t=-\frac{1}{3}$.

Ainsi $O'\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

3. a) On a : $t.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH}$ donc $t.\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OH}\right).\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{BC}$

comme $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux alors

$t.\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}$ d'où $t.BC^2 = \overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}$ ou encore $t = \dfrac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}}{BC^2}$.

b) On a : $\overrightarrow{BO}\begin{pmatrix}2\\6\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\6\\-8\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC} = -4 + 36 + 40 = 72$

Puis $BC^2 = 4 + 36 + 64 = 104$.

Il en résulte que : $t = \dfrac{72}{104} = \dfrac{9}{13}$.

Les coordonnées de H sont données par :

$$\begin{cases} x_H - x_B = t.x_{\overrightarrow{BC}} \\ y_H - y_B = t.y_{\overrightarrow{BC}} \\ z_H - z_B = t.z_{\overrightarrow{BC}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = x_B + t.x_{\overrightarrow{BC}} \\ y_H = y_B + t.y_{\overrightarrow{BC}} \\ z_H = z_B + t.z_{\overrightarrow{BC}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -\dfrac{44}{13} \\ y_H = -\dfrac{24}{13} \\ z_H = -\dfrac{7}{13} \end{cases} \quad \text{ainsi} \quad H\left(-\frac{44}{13}, -\frac{24}{13}, -\frac{7}{13}\right).$$

4. La sphère (S) est de centre O et tangente en H à la droite (BC) donc le rayon de la sphère (S) est R = OH = $\dfrac{\sqrt{2561}}{13}$.

La sphère (S') est de centre O et de tangente au plan (P) donc le rayon de (S') est R' = d(O, P) = $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Si h est une homothétie qui transforme (S) en (S') alors le centre de h est O et le rapport k de h vérifie :

$R' = |k|.R \Leftrightarrow |k| = \dfrac{R'}{R} \Leftrightarrow |k| = \dfrac{1}{197\sqrt{39}} \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{197\sqrt{39}}$ ou $k = -\dfrac{1}{197\sqrt{39}}$.

Exercice 4 :

1. $13.A - 11.B = 13(11n + 3) - 11(13n - 1) = 50$

   Donc tout diviseur commun de A et B est un diviseur de 50.
2. On a : $50 \times 2 - 11 \times 9 = 100 - 99 = 1$ donc (2, 9) est une solution particulière de l'équation (E) : 50 x – 11 y = 1.
3. a) Le couple (6, 27) est une solution particulière de l'équation (E') : 50 x – 11 y = 3.
   D'où 50(x – 6) - 11(y – 27) = 0 ou encore 50(x – 6) = 11(y – 27).

Il en résulte :
11 divise 50(x – 6) et (11 et 50 sont premiers entre eux) donc 11 divise (x – 6)
D'où il existe un entier relatif k tel que x – 6 = 11k ou encore x = 11k + 6.
Ainsi : 50.11k = 11(y – 27) d'où y – 27 = 50k ou encore y = 50k + 27.
Supposons que (x ,y) = (11k + 6, 50k + 27) où k est un entier relatif :
50.(11k + 6) – 11(50k + 27) = 50. 11k + 300 – 11. 50k - 297 = 3
Donc (11k + 6, 50k + 27) est solution de (E').
L'ensemble des solutions de (E') est $\{(11k+6,50k+27), k\in\mathbb{Z}\}$.

c) Si $A\wedge B=50$ alors 50 divise 11n + 3 donc il existe un entier naturel p tel que 11k + 3 = 50p ou encore 50p – 11n = 3 .
Le couple (p, n) est solution de (E') et n = 50k + 27 où k entier naturel.
Si n = 50k + 27 où k entier naturel , nous avons alors

$$\begin{cases} A=11(50k+27)+3 \\ B=13(50k+27)-1 \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} A=50(11k+6) \\ B=50(13k+7) \end{cases}$$

Ce qui montre que $A\wedge B=50$

En conclusion : $A\wedge B=50$ équivaut à n = 50k + 27 , k entier naturel.

4. Si $A\wedge B=25$ alors 25 divise 11n + 3 donc il existe un entier naturel q tel que 11n + 3 = 25q ou encre 25q - 11n = 3.
Une solution particulière de cette équation est (1, 2) et nous pouvons écrire n = 25k' +2 où k' est un entier naturel.
Nous obtenons alors :

$$\begin{cases} A=11(25k'+2)+3 \\ B=13(25k'+2)-1 \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} A=25(11k'+1) \\ B=25(13k'+1) \end{cases} \text{ ce qui montre que :}$$

- Si k' est pair alors $A\wedge B=25$.
- Si k' est pair alors $A\wedge B=50$.

En conclusion : $A\wedge B=25$ équivaut à n = 50m + 2 , m entier naturel.

Exercice 5 :

1. Dressons le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
e^x-1	-	0	+
$\frac{e^x-1}{x}$	+	‖	+

Ainsi , pour tout x réel non nul, $\frac{e^x-1}{x}>0$.

2. a) On sait que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\ln 1=0$

par suite $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$ d'où f est continue en 0.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}.\left(1+e^{-x}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{x}=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

3. a) Pour tout rée x non nul , $f'(x)=\frac{\frac{e^x.x-\left(e^x-1\right)}{x^2}}{\frac{e^x-1}{x}}=\frac{xe^x-e^x+1}{x\left(e^x-1\right)}$.

b) (C_1) est la courbe représentative de g et (C_2) est celle de h.

(C_1) est au dessus de (C_2) sur $\mathbb{R}^*$ donc pour tout x réel non nul , g(x) > h(x)

(C_1) et (C_2) se rencontrent à l'origine du repère d'où g(0) = h(0).

D'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)-h(x)$		+	0	+	

On remarque que pour tout x réel non nul , $f'(x)=\frac{xe^x-e^x+1}{x\left(e^x-1\right)}=\frac{g(x)-h(x)}{x\left(e^x-1\right)}$

Et comme $x\left(e^x-1\right)=x^2.\frac{e^x-1}{x}>0$, alors $f'(x)>0$.

c) Pour tout réel non nul , on a :

$$f(-x)=\ln\left(\frac{e^{-x}-1}{-x}\right)=\ln\left(\frac{\frac{1-e^x}{e^x}}{-x}\right)=\ln\left(\frac{\frac{e^x-1}{x}}{e^x}\right)=\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)-\ln\left(e^x\right)$$

$$=\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)-x=f(x)-x$$

Comme f(0) – 0 = 0 = f(-0) alors pour tout x réel , f(x) – x = f(-x) .

D'où pour tout x > 0, -x < 0 et comme f est strictement croissante sur $]-\infty,0[$ alors f(-x) < f(0)

ou encore f(-x) < 0 d'où pour tout x > 0, f(x) - x < 0.

Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors pour tout x réel, $f'(x)-1=-f'(-x)$.

Il en résulte : $f'(0)-1=-f'(0)\Leftrightarrow 2f'(0)=1\Leftrightarrow f'(0)=\frac{1}{2}$.

d) Le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	$\frac{1}{2}$	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

4. a) On a : $u_0>0$.

On suppose que , $u_n>0$ où n est un entier naturel , et on montre que $u_{n+1}>0$.

Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors $u_n>0\Rightarrow f(u_n)>f(0)\Rightarrow u_{n+1}>0$.

Ainsi : pour tout entier n , $u_n>0$.

b) Pour tout entier n , $u_n>0$ donc $f(u_n)-u_n<0\Leftrightarrow u_{n+1}-u_n<0\Leftrightarrow u_{n+1}<u_n$.

Donc la suite (u_n) est décroissante.

c) La suite (u_n) est décroissante et comme la suite (u_n) est minorée par 0 alors (u_n) converge .

Soit $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$, $u_n>0\Rightarrow \ell\geq 0$

D'autre part f est continue sur $\mathbb{R}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ alors $\ell=f(\ell)$

$f(-\ell)=f(\ell)-\ell=0$ donc $-\ell=0\Leftrightarrow\ell=0$. Par suite : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

d) Pour tout n , $v_n=\frac{1}{u_n}\int_0^{u_n}f(x)dx$.

$0\leq x\leq u_n\Rightarrow 0\leq f(x)\leq f(u_n)\Rightarrow 0\leq f(x)\leq u_{n+1}$. Or $u_{n+1}<u_n$, il en résulte :

0 f ?x d u_n donc d0 d ∫_0^{u_n} f(x)dx d 1/u_n u3 ∫_0^{u_n} dx œ d0 d u_n u_n . 3

On a , pour tout entier n , 0 v_n d u_n lim_{n of} u_n 0 alors lim_{n of} v_n 0.