Mathématiques	*Devoir de synthèse n°1*		
Lycée IBN KHALDOUN - RADES			
4 e Maths 1	Mardi 06-12-2011	Durée : 3 heures	**Prof : ABIDI Farid**

Exercice n°1: *(3pts)*

Répondre par Vrai à Faux et avec justification à chacune des trois propositions suivantes.

1) Soit $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$ alors, pour tout $x > 0$, $f'(x) = -\frac{\pi}{x^2}\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

2) Si (v_n) est une suite décroissante et convergente vers 0, alors les suites (v_n) et $(-v_n)$ sont adjacentes.

3) Soit θ un réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, l'écriture exponentielle de $\frac{i}{1+i\tan\theta}$ est $\cos\theta\, e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$.

Exercice n°2: *(5 points)*

Dans le plan orienté, soit un rectangle ABCD tel que AB=2AD et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On note I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [CD] et K le symétrique de I par rapport à (DC).

1) Montrer que le quadrilatère ICKD est un carré.

2) On pose $f = S_{(IC)} \circ t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(IJ)}$.

a) Caractériser l'application $S_{(BC)} \circ S_{(IJ)}$.

b) En déduire que f est une rotation dont on précisera l'angle et le centre.

3) On pose $g = t_{\overrightarrow{IK}} \circ S_{(IC)}$.

Montrer que g est la symétrie glissante d'axe (AJ) et de vecteur $\overrightarrow{IC}$.

4) Pour tout point M du plan, on pose $M' = R_{\left(D, \frac{\pi}{2}\right)}(M)$ et $M'' = g(M)$.

Montrer que M' et M'' sont symétriques par rapport à la droite (IK).

Exercice n°3: *(6 points)*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit l'équation (E) : $z^3 - 3z^2 - 2ia^2z + 6ia^2 = 0$ où a est nombre complexe non nul.

1) a- Vérifier 3 est une racine de (E).

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2) On désigne par I, A, M' et M" les points d'affixes 1, 3, (1+i)a et –(1+i)a.

On pose a = x + iy avec x et y sont deux réel non nuls à la fois.

a- Montrer que : (A, M' et M" sont alignés) si, et seulement si, (a = $\alpha(1-i)$, où $\alpha \in \mathbb{R}^*$).

b- Montrer que : ($\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{AM''}$ sont orthogonaux) si, et seulement si, ($|a| = \frac{3}{\sqrt{2}}$).

Dans toute la suite de l'exercice, on prend a = $\frac{\sqrt{3}}{2}(1+i)$.

3) Montrer que le triangle AM'M" est équilatéral, de sens direct et de centre I.

4) Soit R la rotation de centre I qui transforme A en M' et R' la rotation de centre A qui transforme M' en M".

a- Donner les écritures complexes de R et R'.

b- En déduire l'écriture complexe de f = $R \circ R'$. Caractériser f.

Exercice n°4: *(6 points)*

Soit f une fonction définie et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. On donne la courbe représentative (C) de **la fonction dérivée f '** de f. (C) passe par les points A(0,1) et B(1, $\frac{1}{2}$). L'axe des abscisses est une asymptote à (C).

On suppose que $f(1) > 1$ et que la courbe représentative (Γ) de f admet une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.

1) Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes:

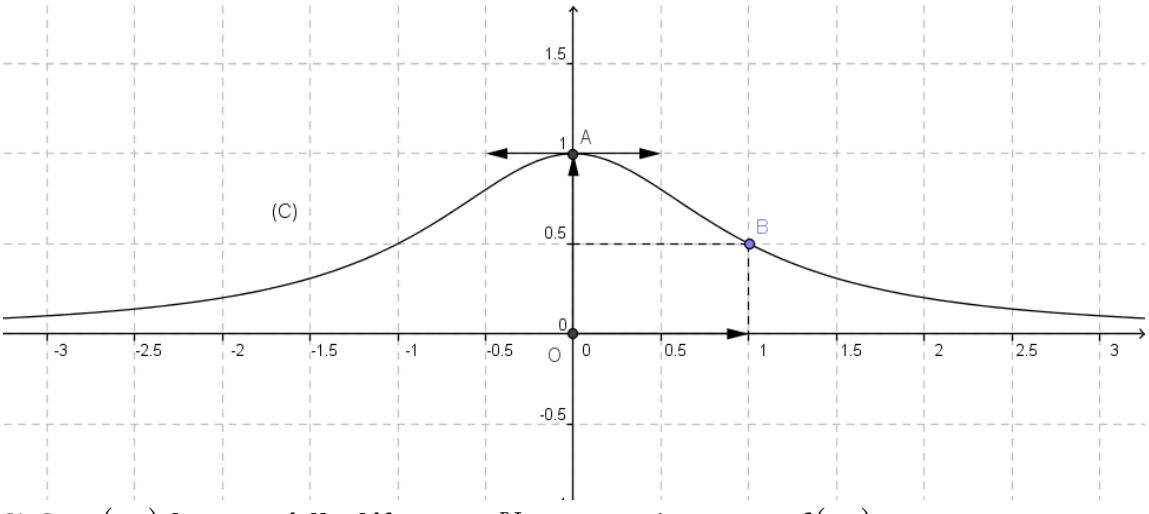
a) Déterminer le sens de variation de f.

b) (Γ) admet-elle un point d'inflexion? Justifier votre réponse.

c) Déterminer $f'([1,+\infty[)$ et en déduire que $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \geq 1$.

2) Montrer que l'équation f(*x*) = *x* admet une solution unique α dans $[1,+\infty[$.

3) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $|f(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$.



3) Soit (u_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout entier naturel n.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq 1$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

c) En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (\alpha - 1)$.

et calculer la limite de la suite (u_n).

Corrigé

Exercice n°1:

1) Faux.

En effet : Si $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$ alors, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = -\frac{\pi}{x^2}\cos'\left(\frac{\pi}{x}\right) = -\frac{\pi}{x^2}\left[-\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right] = \frac{\pi}{x^2}\sin\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

2) Vrai.

En effet : Si (v_n) est une suite décroissante et converge vers 0 alors, $(-v_n)$ est croissante et converge vers 0. D'où pour tout entier n, $(v_n) > (-v_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) - (-v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} 2v_n = 0$.

Ainsi, les suites (v_n) et $(-v_n)$ sont adjacentes.

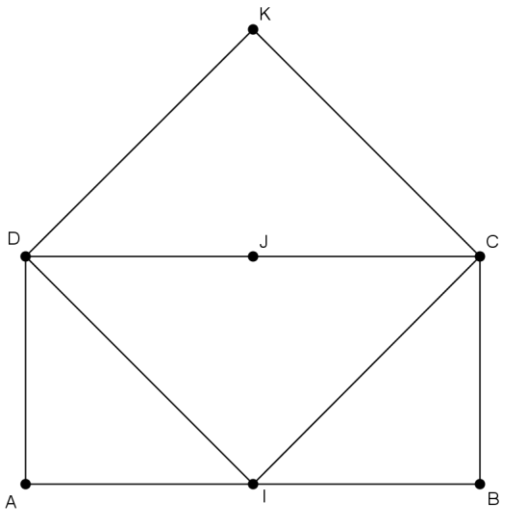
3) Vrai.

En effet :

Soit θ un réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$\cos\theta > 0 \quad \frac{i}{1+i\tan\theta} = \frac{i}{1+i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \cos\theta\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\cos\theta+i\sin\theta} = \cos\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\theta}} = \cos\theta e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}.$$

Exercice n°2:



1) ABCD est un rectangle , I milieu de [AB] et J milieu de [CD] donc AIJD et IBCJ sont deux carrés isométriques et adjacents d'où IC = ID et

$\left(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{ID}\right)\equiv\left(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IJ}\right)+\left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{ID}\right)[2\pi]$

$\equiv\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}[2\pi]$ donc le triangle ICD est isocèle et rectangle en I.

$\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Comme J est le symétrique de I par rapport à (CD) alors le quadrilatère ICKD est un carré.

2) Soit $f=S_{(IC)}\circ t_{\overrightarrow{AB}}\circ S_{(IJ)}$.

a) On a : $t_{\overrightarrow{IB}}\left((IJ)\right)=(BC)$ donc $S_{(BC)}\circ S_{(IJ)}=t_{2\overrightarrow{IB}}=t_{\overrightarrow{AB}}$.

b) $f=S_{(IC)}\circ t_{\overrightarrow{AB}}\circ S_{(IJ)}=S_{(IC)}\circ S_{(BC)}\circ S_{(IJ)}\circ S_{(IJ)}=S_{(IC)}\circ S_{(BC)}=R_{\left(B,2\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CI}\right)\right)}=R_{\left(B,-\frac{\pi}{2}\right)}$.

3) On pose $g=t_{\overrightarrow{IK}}\circ S_{(IC)}$.

$g=t_{\overrightarrow{IK}}\circ S_{(IC)}=t_{\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}}\circ S_{(IC)}=t_{\overrightarrow{IC}}\circ t_{\overrightarrow{ID}}\circ S_{(IC)}=t_{\overrightarrow{IC}}\circ S_{(AJ)}\circ S_{(IC)}\circ S_{(IC)}=t_{\overrightarrow{IC}}\circ S_{(AJ)}$. Ainsi , g est la symétrie glissante d'axe (AJ) et de vecteur $\overrightarrow{IC}$.

4) Pour tout point M du plan , on pose $M'=t_{\overrightarrow{AB}}(M)$ et $M''=g(M)$.

$M'=f(M)\Leftrightarrow M=f^{-1}(M')$ donc $M''=g(M)=g\left[f^{-1}(M')\right]=\left(g\circ f^{-1}\right)(M')$

$g\circ f^{-1}=t_{\overrightarrow{IC}}\circ S_{(AJ)}\circ\left(t_{\overrightarrow{AB}}\right)^{-1}=S_{(AJ)}\circ t_{\overrightarrow{IC}}\circ t_{\overrightarrow{BA}}=S_{(AJ)}\circ t_{\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{BA}}=S_{(AJ)}\circ t_{\overrightarrow{BJ}}=S_{(AJ)}\circ S_{(AJ)}\circ S_{(IC)}=S_{(IC)}$

Car $t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BJ}}\left((IC)\right)=t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{ID}}\left((IC)\right)=(AJ)$ donc $S_{(IC)}\circ S_{(AJ)}=t_{\overrightarrow{BJ}}$

Ainsi , M′ et M″ sont symétriques par rapport à la droite (IC) .

Exercice n°3:

Soit l'équation (E) : $z^3-3z^2-2ia^2z+6ia^2=0$ où a est nombre complexe non nul.

1) a- $3^3-3.3^2-2ia^2.3+6i.a^2=27-27-6ia^2+6ia^2=0$ donc 3 est une racine de (E).

b- Pour tout z de $\mathbb{C}$, $z^3-3z^2-2ia^2z+6ia^2=(z-3)(z^2+bz+c)$

$=z^3+(b-3)z^2+(c-3b)z-3c$

D'où par identification : $\begin{cases}b-3=-3\\c-3b=-2ia^2\\-3c=6ia^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=0\\c=-2ia^2\end{cases}$

Par suite , (E) $\Leftrightarrow(z-3)\left(z^2-2ia^2\right)=0\Leftrightarrow z=3$ ou $z^2=2ia^2$

Or $2ia^2=(1+i)^2a^2=\left[(1+i)a\right]^2$, alors les solutions de l'équation (E) sont : 3, (1+i)a et -(1+i)a.

3) On désigne par I, A, M' et M" les points d'affixes 1 , 3 , (1+i)a et –(1+i)a.

On pose a = x + iy avec x et y sont deux réel non nuls à la fois.

On a : (1 + i) a = (1 + i)(x + iy) = x – y +i(x + y) donc $\overrightarrow{AM'}\begin{pmatrix}x-y-3\\x+y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM''}\begin{pmatrix}-x+y-3\\-x-y\end{pmatrix}$

a- A, M' et M" sont alignés $\Leftrightarrow\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{AM''}$ sont colinéaires .

$\Leftrightarrow \text{dét}\left(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AM''}\right)=0 \Leftrightarrow (x-y-3).(-x-y)-(x+y).(-x+y-3)=0$

$\Leftrightarrow (x+y)(-x+y+3+x-y+3)=0 \Leftrightarrow 6(x+y)=0 \Leftrightarrow y=-x \Leftrightarrow a=x(1-i)$

Ainsi : A, M' et M" sont alignés si, et seulement si , (a = $\alpha(1-i)$, où $\alpha \in \mathbb{R}^*$).

b- ($\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{AM''}$ sont orthogonaux) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM'}.\overrightarrow{AM''}=0 \Leftrightarrow (x-y-3)(-x+y-3)+(x+y)(-x-y)=0$

$\Leftrightarrow -((x-y)-3)((x-y)+3)-(x+y)^2=0 \Leftrightarrow -(x-y)^2+9-(x+y)^2=0$

$\Leftrightarrow -2x^2-2y^2+9=0 \Leftrightarrow x^2+y^2=\frac{9}{2} \Leftrightarrow x^2+y^2=\frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |a|=\frac{3}{\sqrt{2}}$.

3) si a= $\frac{\sqrt{3}}{2}(1+i)$ alors (1 + i)a= $(1+i)^2\frac{\sqrt{3}}{2}=i\sqrt{3}$.

AM' = $|i\sqrt{3}-3|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ et AM"= $|-i\sqrt{3}-3|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$z_{\overrightarrow{IA}}+z_{\overrightarrow{IM'}}+z_{\overrightarrow{IM''}}=(3-1)+(i\sqrt{3}-1)+(-i\sqrt{3}-1)=0$ donc $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IM'}+\overrightarrow{IM''}=\vec{0}$ donc I est le centre de gravité du triangle AM′M″.

$$\left(\overrightarrow{AM'},\overrightarrow{AM''}\right)\equiv \arg\left(\frac{-i\sqrt{3}-3}{i\sqrt{3}-3}\right)[2\pi]\equiv \arg\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}\right)[2\pi]\equiv \arg\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)[2\pi]\equiv \arg\left(\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^2}{4}\right)[2\pi]$$

$$\equiv 2\arg\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)[2\pi] \equiv 2.\frac{\pi}{6}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$$

Donc le triangle AM′M″ équilatéral et de sens direct.

4) Soit R la rotation de centre I qui transforme A en M' et R' la rotation de centre A qui transforme M' en M".

a- R est la rotation de centre I(1) et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ donc l'écriture complexe de la rotation R est :

$$z'-1=e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-1) \Leftrightarrow z'=e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-1)+1 \Leftrightarrow z'=e^{i\frac{2\pi}{3}}z+1-e^{i\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow z'=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}z+\frac{3-i\sqrt{3}}{2}$$

R' est la rotation de centre A(3) et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ donc l'écriture complexe de la rotation R' est :

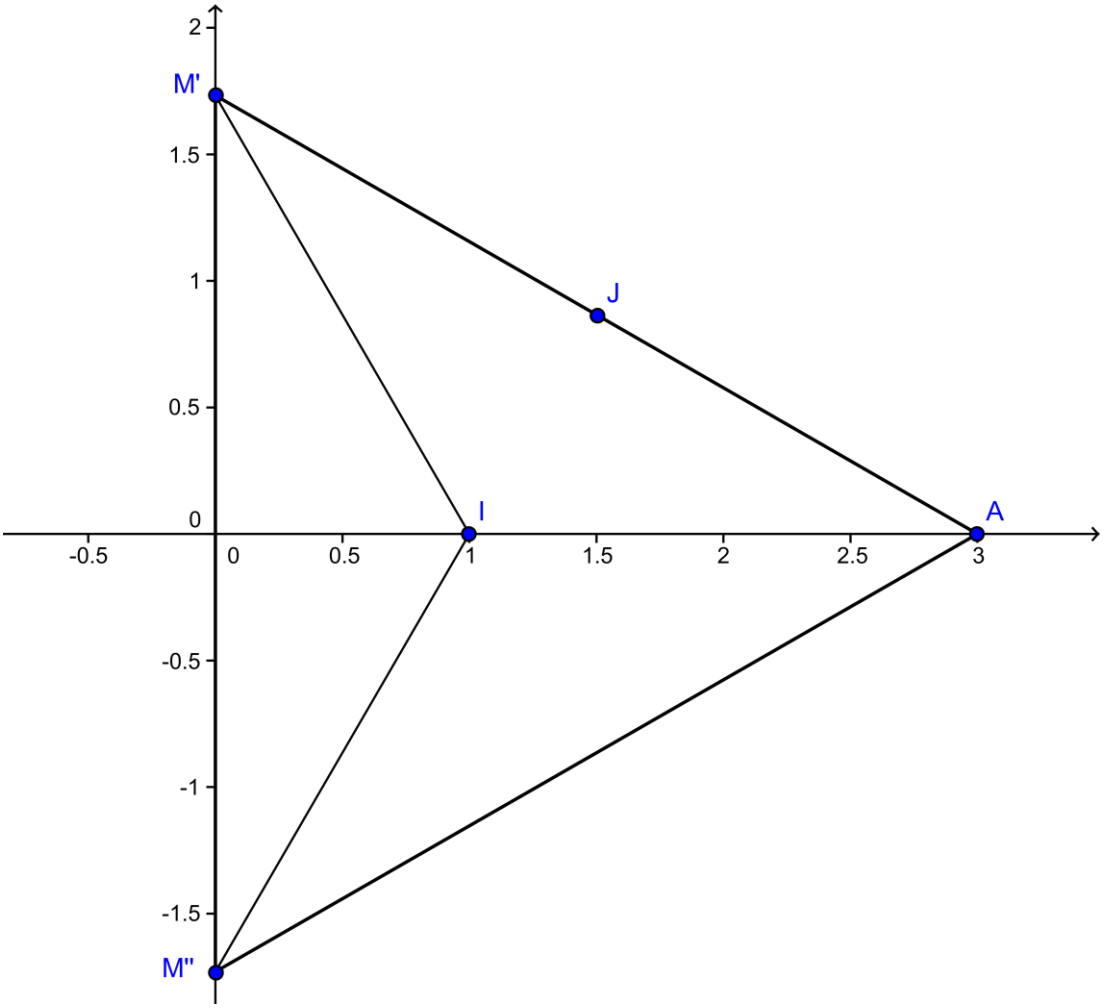
$$z'-3=e^{i\frac{\pi}{3}}(z-3) \Leftrightarrow z'=e^{i\frac{\pi}{3}}(z-3)+3 \Leftrightarrow z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z+3-3e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z'=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z+\frac{3-3i\sqrt{3}}{2}$$

b- L'écriture complexe de f = R ∘ R' est : $z'=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z+\frac{3-3i\sqrt{3}}{2}$

$z'' = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} z' + \frac{3-i\sqrt{3}}{2}$ avec $z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z + \frac{3-3i\sqrt{3}}{2}$

D'où $z'' = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} z + \frac{3-3i\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{3-i\sqrt{3}}{2} = -z + \left(\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right).\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) = -z + \frac{3+i\sqrt{3}}{2}$

Ainsi , f est la symétrie centrale de centre $J\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



Exercice n°4:

1) a) Pour tout x réel , f'(x) > 0 donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction f' admet un maximum en 0 donc la dérivée seconde f'' de f s'annule en 0 en changeant de signe d'où la courbe (Γ) de f admet un point d'inflexion d'abscisse 0.

c) $f'\left([1,+\infty[\right) = \left]\lim_{x\to+\infty} f'(x), f'(1)\right] = \left]0, \frac{1}{2}\right]$.

On en déduit que pour tout $x \geq 1$, $0 < f'(x) \leq \frac{1}{2}$ donc $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

2) Soit pour tout $x \geq 1$, g(x) = f(x) – x.

g est continue et dérivable sur $[1,+\infty[$. Pour tout $x \geq 1$, g'(x) = f'(x) – 1 < 0 donc g est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.

$$g([1,+\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} g(x), g(1)\right] = \left]\lim_{x\to+\infty} f(x)-x, f(1)-1\right]$$

On a :

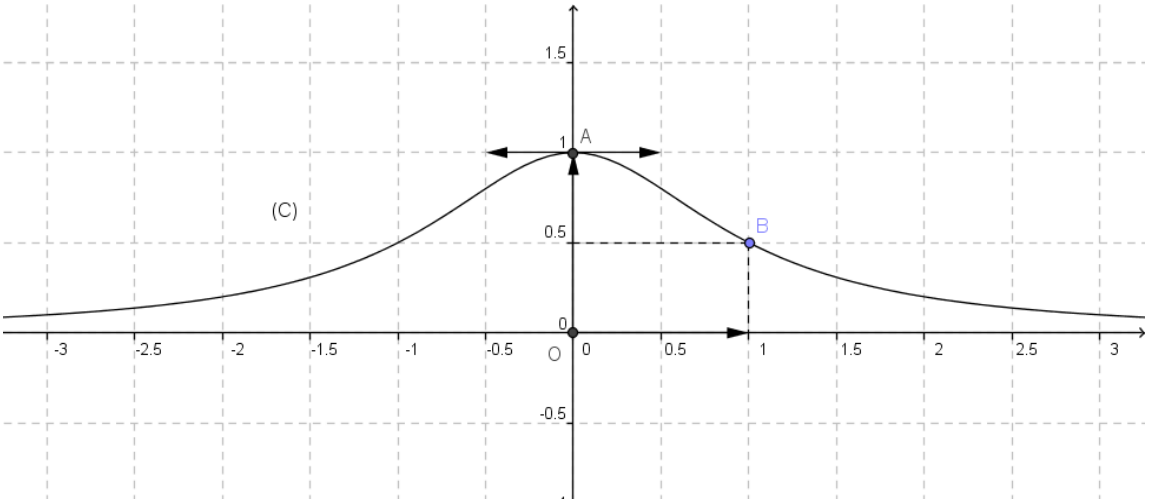
- ✓ d'une part : f(1) > 1 alors f(1) – 1 > 0 .
- ✓ et d'autre part : la courbe (Γ) de f admet une asymptote horizontale au voisinage de +∞ donc la limite de f en +∞ est finie d'où $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x = -\infty$.

Il en résulte : $g([1,+\infty[) =]-\infty, f(1)-1]$ et $0 \in g([1,+\infty[)$.

Ainsi, l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α dans $[1,+\infty[$.

3) f est dérivable sur $[1,+\infty[$ et pour tout x de $[1,+\infty[$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

Donc pour tout $x \geq 1$, $|f(x)-f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha| \Leftrightarrow |f(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$.



3) Soit (u_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout entier naturel n.

a) On a : $u_0 = 1$ donc $u_0 \geq 1$.

On suppose que : $u_n \geq 1$, pour un certain rang n , et on démontre que $u_{n+1} \geq 1$.

Comme est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors : $u_n \geq 1 \Rightarrow f(u_n) \geq f(1) \Rightarrow u_{n+1} \geq 1$.

Donc pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$.

b) Pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1$ donc $|f(u_n)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha| \Leftrightarrow |u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$.

c) On a : $|u_0-\alpha| = |1-\alpha| = \alpha-1$ donc $|u_0-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0.(1-\alpha)$.

On suppose que : $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n(\alpha-1)$, pour un certain rang n , et mon montre que :

$|u_{n+1}-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(\alpha-1)$.

$$|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n(\alpha-1) \Rightarrow \frac{1}{2}|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(\alpha-1).$$

Or $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$, donc $|u_{n+1}-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(\alpha-1)$.

On conclue : pour tout entier naturel n, on a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (\alpha - 1)$.

Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (1 - \alpha) = 0$. Il en résulte : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.