

Exercice 1: (3 points)

Répondre par Vrai ou Faux aux trois propositions suivantes. La justification est exigée.

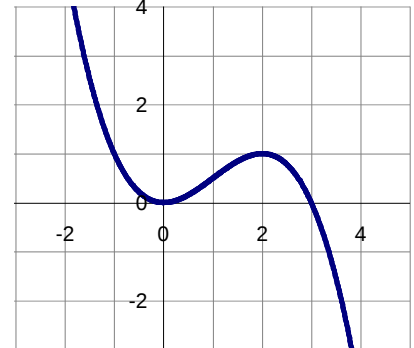
1. La courbe ($\mathcal{C}$) ci contre est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

L'équation $|f(x)| = 2$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

2. On pose, pour tout x réel, $f(x) = \cos x + \sqrt{3} \sin x$.

Si $x \in \left] -\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right[$ alors $f(x) > 0$.

3. Si $a \in \left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right[$ et $\sin a = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ alors $\cos 2a = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

**Exercice 2 :** (6 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4|x| + 4}$. On note ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. a) Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

b) Montrer que f est paire.

c) Montrer que f admet un minimum que l'on précisera.

2. a) Calculer les limites de f en 2 et en $+\infty$.

b) En déduire les asymptotes à ($\mathcal{C}$).

3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} -x + 2 + \frac{1}{2x+1}, & \text{si } x < -1 \\ \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4|x| + 4}, & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \frac{8\sqrt{x+3} - 16}{x-1}, & \text{si } x > 1 \\ a, & \text{si } x = 1 \end{cases}$

a) Montrer que g est continue en -1.

b) Déterminer le réel a pour que g soit continue en 1.

Exercice 3: (5 points)

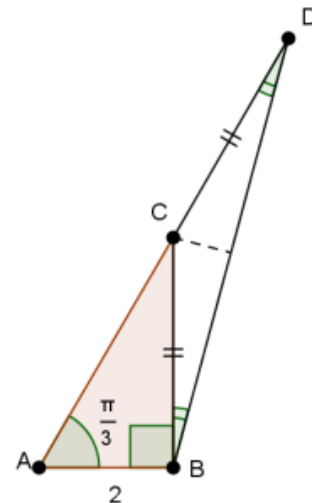
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(4, 0)$, $B(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ et C le point tel que $OACB$ soit un losange $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$.

1. Montrer que l'aire du triangle OAB est $\mathcal{A} = \frac{1}{2} |\det(\vec{OA}, \vec{OB})|$ puis calculer $\mathcal{A}$.
2. Déterminer les coordonnées polaires de B .
3. Soit H le centre du losange $OACB$.
 - a) Montrer que $OH = \frac{2}{AB} \times \mathcal{A}$.
 - b) Déterminer les coordonnées polaires de C .

Exercice 4: (6 points)

Sur le dessin ci-contre, le triangle ABC est rectangle en B , $AB = 2$ et $(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$. Le point D appartient à la droite (AC) et $CD = BC$.

1. a) Démontrer que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4$.
 b) En recalculant autrement $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, démontrer que $AC = 4$.
2. a) Démontrer que $CB = 2\sqrt{3}$.
 b) Démontrer que $\vec{CB} \cdot \vec{CD} = -6\sqrt{3}$.
3. a) Déterminer la mesure principale de l'angle $(\vec{BC}, \vec{BD})$.
 b) En remarquant que $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$, calculer $\cos \frac{\pi}{12}$.
 c) En recalculant autrement $\vec{CB} \cdot \vec{CD}$, démontrer que $BD = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.



4. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan pour lesquels $(\vec{MB}, \vec{MD}) \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi]$.

CORRIGE**Exercice 1 :**1. **Faux**

En effet : $|f(x)| = 2 \Leftrightarrow f(x) = 2$ ou $f(x) = -2$ donc l'équation $|f(x)| = 2$ admet deux racines.

2. **Vrai.**

En effet :

On a : $f(x) = \cos x + \sqrt{3} \sin x$ donc $f(x) = r \cos(x - \varphi)$

$$\text{Avec } r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos \varphi = \frac{1}{2} \\ \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{donc } \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{D'où } f(x) = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

$$\text{Or } -\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} \quad \text{donc } \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > 0.$$

$$\text{Ainsi, pour tout } x \text{ de } \left]-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[, f(x) > 0.$$

3. **Vrai.**

$$\text{En effet : } \cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a = 1 - 2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{4} \right)^2 = 1 - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{8} = 1 - \frac{3 - \sqrt{5}}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Exercice 2 :

$$1. \text{ a) } f(x) \text{ existe } \Leftrightarrow x^2 - 4|x| + 4 \neq 0 \Leftrightarrow (|x| - 2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq 2 \Leftrightarrow x \neq -2 \text{ et } x \neq 2.$$

Donc l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

b) Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, $-x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ et $f(-x) = f(x)$ donc f est paire.

c) On a : $f(0) = \frac{1}{4}$, calculons, alors pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$,

$$f(x) - \frac{1}{4} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4|x| + 4} - \frac{1}{4} = \frac{3x^2 + 4|x|}{4(|x| - 2)^2} \geq 0 \quad \text{donc } f(x) \geq \frac{1}{4}.$$

Par suite : f admet un minimum en 0 qui vaut $\frac{1}{4}$.

$$2. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{(|x| - 2)^2} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1.$$

b) La droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à $(\mathcal{C})$ et comme f est paire alors la droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à $(\mathcal{C})$.

La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$ et comme f est paire alors la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $-\infty$.

3. a) On a : $g(-1) = f(-1) = 2$.

D'autre part : $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 2 = g(-1)$

et $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} -x + 2 + \frac{1}{2x+1} = 2 = g(-1)$.

Donc g est continue en -1 .

b) On a : $g(1) = a$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$

et $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{8\sqrt{x+3}-16}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{8(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{8}{\sqrt{x+3}+2} = 2$.

Pour que f soit continue en 2 , il faut que $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = g(1)$ d'où $a = 2$.

Exercice 3 :

1. L'aire du triangle OAB est $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \text{OA} \cdot \text{OB} \cdot \left| \sin(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}) \right|$.

Or $\sin(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}) = \frac{\det(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}})}{\text{OA} \cdot \text{OB}}$, il en résulte : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}})|$.

$\mathcal{A} = \det(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}) = \begin{vmatrix} 4 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{vmatrix} = 8\sqrt{2}$ donc $\mathcal{A} = 4\sqrt{2}$.

2. $\text{OB} = \mathcal{A} = \sqrt{(-2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{16} = 4$.

Soit θ la mesure principale de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{\text{OB}})$, $\begin{cases} \cos \theta = \frac{-2\sqrt{2}}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

D'où les coordonnées polaires de B sont $\left(4, \frac{3\pi}{4}\right)$.

3. a) H est le centre du losange OACB donc les droites (AB) et (OC) sont perpendiculaires en H d'où H est le projeté orthogonal de O sur (AB).

Par suite, l'aire du triangle OAB est $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \text{OH} \cdot \text{AB} \Leftrightarrow \text{OH} = \frac{2}{\text{AB}} \cdot \mathcal{A}$.

b) $\text{OC} = 2 \cdot \text{OH} = \frac{4}{\text{AB}} \cdot 4\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{(-2\sqrt{2}-4)^2 + (2\sqrt{2})^2}} = \frac{16\sqrt{2}}{4\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

et $(\vec{i}, \overrightarrow{\text{OC}}) \equiv (\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OC}})[2\pi] \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}})[2\pi] \equiv \frac{3\pi}{8}[2\pi]$.

Donc les coordonnées polaires de C sont $\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \frac{3\pi}{8} \right)$.

Exercice 4 :

1. a) B est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 = 4$.

$$b) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2AC \times \frac{1}{2} = AC \quad \text{d'où } AC = 4.$$

2. a) ABC est un triangle rectangle en B donc $CB = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

$$b) \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = CB \cdot CD \cdot \cos(\angle BCD) = CB^2 \cos\left(\pi - \angle ACB\right) = 12 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 12 \cos \frac{5\pi}{6} = 12 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -6\sqrt{3}.$$

3. a) BCD est un triangle isocèle en C donc

$$2(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}) = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = \pi - (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = \frac{11\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Si } k' = 2k, \quad k' \in \mathbb{Z} : \text{alors } (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = \frac{11\pi}{12} + 2k'\pi$$

$$\text{Si } k' = 2k - 1, \quad k' \in \mathbb{Z} : \text{alors } (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = \frac{11\pi}{12} - \pi + 2k'\pi = -\frac{\pi}{12} + 2k'\pi.$$

Comme l'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$ est indirect alors sa mesure principale est $-\frac{\pi}{12}$.

$$b) \text{ On a } \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}.$$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

$$c) \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(CB^2 + CD^2 - BD^2) = \frac{1}{2}(24 - BD^2) \quad \text{d'où } \frac{1}{2}(24 - BD^2) = -6\sqrt{3}$$

$$\text{donc } 24 - BD^2 = -12\sqrt{3} \quad \text{donc } BD^2 = 24 + 12\sqrt{3} = 12(2 + \sqrt{3}).$$

$$\text{Ainsi } BD = \sqrt{12(2 + \sqrt{3})} = 2\sqrt{3}\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

4. $\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD}\right) \equiv \frac{5\pi}{12}[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD}\right) \equiv \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}\right)[2\pi]$ donc l'ensemble Γ est l'arc orienté $\widehat{DB}$ privé de B et D du cercle de centre C et passant par B.