<u>Exercice 1:</u> (4 points)

Dans le tableau ci-dessous, à chaque question une seule des réponses proposées est correcte.

Ecrire le numéro de chaque question et donner, sans **justification**, la réponse qui lui correspond.

N	Questions	Réponses		
		a	b	c
1	Si z est un nombre complexe, alors Im(-iz) est égal a :	$i\operatorname{Re}(z)$	$-\operatorname{Re}(z)$	$\operatorname{Im}(z)$
2	Si $z=e^{i\frac{\pi}{2}}+e^{-i\frac{\pi}{6}}$ alors :	$\arg(z)\equiv\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}[2\pi]$	$\arg(z)\equiv\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}[2\pi]$	$\arg(z)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$
3	Soit les points A(i) et B(-1). L'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $\frac{iz+i}{z-i}$ soit réel est :	La droite (AB) privée de A	Le cercle de diamètre [AB] privé de B.	Le cercle de centre $\Omega\left(\frac{-1+i}{2}\right)$ privé de son point A.
4	L'ensemble des points M(z) tels que $\lvert z-i\rvert=0$ est :	Une droite	Un point	Un cercle

<u>Exercice2:</u> (6 points)

Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on donne les points A et B d'affixes respectives $z_A=1$ et $z_B=-2$. A tout point M du plan distinct de A, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z'=\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+2}$.

1. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'|=1$.

2. Soit α un réel de l'intervalle $]-\pi,\pi[$, on suppose que $z=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{i\alpha}$.

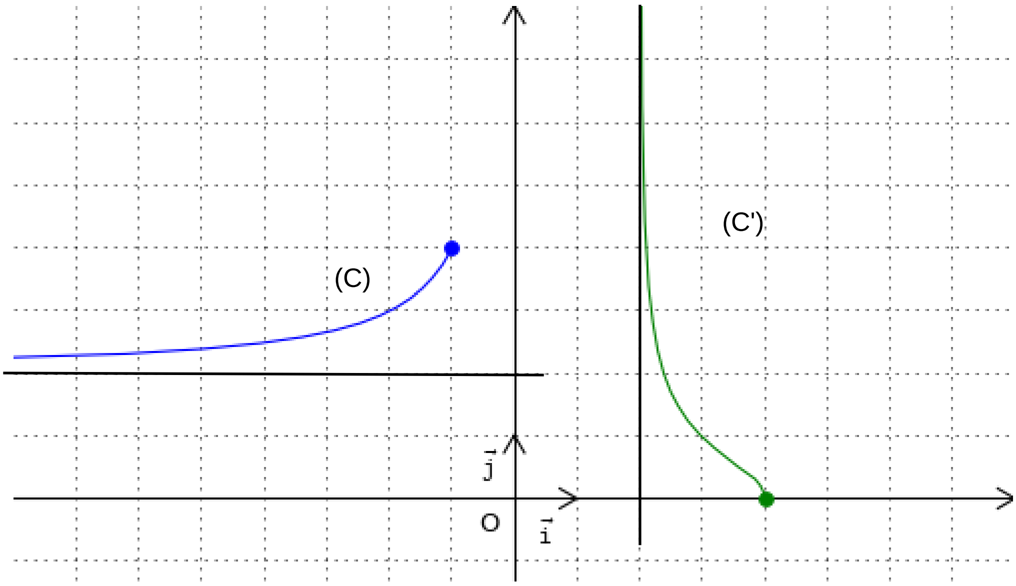
   a) Quel est l'ensemble des points M lorsque α décrit l'intervalle $]-\pi,\pi[$?

   b) Montrer que, pour tout α de $]-\pi,\pi[$, $z'=\frac{e^{-i\alpha}-1}{e^{-i\alpha}+1}$.

   c) A quel ensemble appartient le point M' lorsque α décrit l'intervalle $]-\pi,\pi[$?

Exercice 3: (5 points)

Dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, ci-dessous, est tracée les courbes représentatives (C) et (C') respectives des fonctions f et g. La fonction f est définie sur $]-\infty,-1]$ et la fonction g est définie sur $]2,4]$.



1. Donner graphiquement : f(-1) , f(-2) , g(4) , g(3) , $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$.
2. En déduire $g\circ f([-2,-1])$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g\circ f(x)$.
3. a) Montrer que pour tout réel a et b tels que $a < b \leq -1$, on a $g\circ f(a) > g\circ f(b)$.

   b) En déduire le sens de variation de la fonction $g\circ f$ sur $]-\infty,-1]$.
4. Prouver que l'équation $g\circ f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution α dans l'intervalle]-2,-1[.

Exercice4: (5 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^{\ 2}$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Etudier la monotonie de la suite (u_n).
3. On pose f(x) = $x - x^2$. Prouver que pour tout n de $\mathbb{N}$, $f\left(\frac{1}{n+2}\right) \leq \frac{1}{n+3}$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \frac{1}{n+2}$.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Corrigé

Exercice 1 :

1.

N	Question	Justification (non demandée)	Réponses
1	Si z est un nombre complexe , alors Im(-iz) est égal a :	$-i\,z = -i\,\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)$	b
2	Si $z = e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{-i\frac{\pi}{6}}$ alors :	$z = e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$	c
3	Soit les points A(i) et B(-1). L'ensemble des points M(z) tel que $\frac{iz+i}{z-i}$ soit réel est :	$\frac{iz+i}{z-i} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow i\left(\frac{z+1}{z-i}\right) \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \frac{z+1}{z-i}$ imaginaire pur	c
4	L'ensemble des points M(z) tels que $\lvert z-i\rvert = 0$ est :	$\lvert z-i\rvert = 0 \Leftrightarrow z = i$	b

Exercice 2:

Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on donne les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = -2$. A tout point M du plan distinct de A, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+2}$.

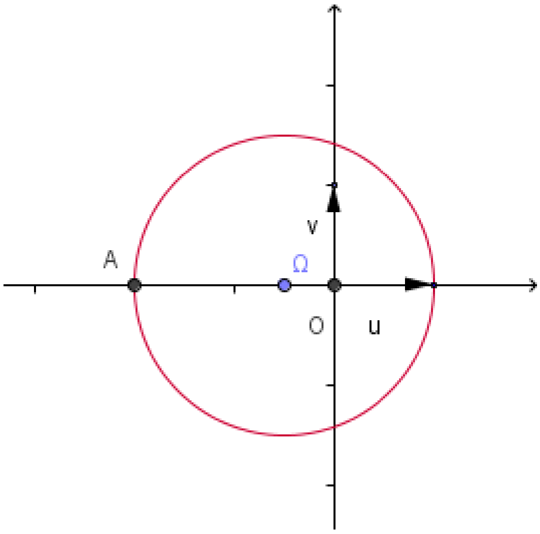
1. $$|z'| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+2}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|\bar{z}-1|}{|\bar{z}+2|} = 1 \Leftrightarrow \left|\overline{(z-1)}\right| = \left|\overline{(z+2)}\right| \Leftrightarrow |z-1| = |z+2| \Leftrightarrow AM = BM$$

   Donc l'ensemble des points tels que $|z'| = 1$ est la médiatrice du segment [AB].

2. Soit α un réel de l'intervalle $]-\pi,\pi[$, on suppose que $z = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{i\alpha}$.

a) $$z = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{i\alpha} \Leftrightarrow z + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}e^{i\alpha} \quad \text{d'où} \quad \left|z + \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \Omega M = \frac{3}{2} \quad \text{où} \ \Omega\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{d'autre part} \ \arg\left(z + \frac{1}{2}\right) \equiv \alpha[2\pi] \Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{u},\Omega M}\right) \equiv \alpha[2\pi], \ \text{or} \ -\pi < \alpha < \pi$$



il en résulte que l'ensemble des points M lorsque α décrit l'intervalle]- π , π[est le cercle de centre Ω et de rayon $\frac{3}{2}$.

b) $z' = \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+2} = \frac{\overline{\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{i\alpha}\right)}-1}{\overline{\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{i\alpha}\right)}+2} = \frac{\frac{3}{2}e^{-i\alpha}-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}e^{-i\alpha}+\frac{3}{2}} = \frac{e^{-i\alpha}-1}{e^{-i\alpha}+1}$.

c) $z' = \frac{e^{-i\alpha}-1}{e^{-i\alpha}+1} = \frac{\left(e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)^2 - e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{\left(e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)^2 + e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\frac{\alpha}{2}}} = \frac{e^{-i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{-i\frac{\alpha}{2}}-e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)}{e^{-i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{-i\frac{\alpha}{2}}+e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)} = \frac{-2i\sin\frac{\alpha}{2}e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{2\cos\frac{\alpha}{2}e^{-i\frac{\alpha}{2}}} = -i\tan\frac{\alpha}{2}$

Lorsque α décrit l'intervalle $]-\pi,\pi[$, $\frac{\alpha}{2}$ décrit $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\tan\frac{\alpha}{2}$ décrit $\mathbb{R}$. Il en résulte que l'ensemble des points M', lorsque α décrit l'intervalle $]-\pi,\pi[$, est l'axe imaginaire $(O,\vec{v})$.

Exercice 3 :

1. f(-1) = 4 , f(-2) = 3 , g(4) = 0 , g(3) = 1 , $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = +\infty$.

2. f est continue et strictement sur $]-\infty,-1]$ et g est continue et strictement croissante sur $]2,4]$ donc

   $g\circ f([-2,-1]) = g(f[-2,-1]) = g([f(-1),f(-2)]) = g[3,4] = [g(4),g(3)] = [0,1]$

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2^+$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g\circ f(x) = +\infty$.

3. a) $a < b \le -1 \Rightarrow f(a) < f(b) \Rightarrow g(f(a)) > g(f(b))$ d'où $a < b \le -1 \Rightarrow g\circ f(a) > g\circ f(b)$.

   b) On en déduit que la fonction $g\circ f$ est strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$.

4. La fonction $g\circ f$ est continue et strictement décroissante sur $[-2,-1]$, $g\circ f([-2,-1]) = [0,1]$ et $\frac{1}{2}\in[0,1]$ donc l'équation $g\circ f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution α dans l'intervalle]-2,-1[.

Exercice 4:

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n{}^2$.

1. Calculer $u_1 = u_0 - u_0{}^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ et $u_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$.
2. Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = -u_n{}^2 \leq 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.
3. a) Pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$f\left(\frac{1}{n+2}\right) - \frac{1}{n+3} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{1}{n+3} = \frac{(n+2)(n+3)-(n+3)-(n+2)^2}{(n+2)^2(n+3)}$$
$$= \frac{-1}{(n+2)^2(n+3)}$$

Donc , pour tout n de $\mathbb{N}$, $\frac{1}{n+2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{1}{n+3} < 0$ donc $f\left(\frac{1}{n+2}\right) < \frac{1}{n+3}$

4. On a : $u_0 = \frac{1}{2}$ donc $0 < u_0 \leq \frac{1}{0+2}$.

On suppose que : $0 < u_n \leq \frac{1}{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$, et on montre que $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{n+3}$.

Remarquons que la fonction f est dérivable sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et que pour tout x de $[0,1]$, on a

$f'(x) = 1 - 2x \geq 0$. Comme $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ alors f est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Il en résulte : $0 < u_n \leq \frac{1}{n+2} \Rightarrow f(0) < f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{n+2}\right) \Leftrightarrow 0 < u_{n+1} \leq f\left(\frac{1}{n+2}\right)$

Or $f\left(\frac{1}{n+2}\right) \leq \frac{1}{n+3}$ donc $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{n+3}$.

Par suite, pour tout entier n , $0 < u_n \leq \frac{1}{n+2}$

5. On a : pour tout entier n , $0 < u_n \leq \frac{1}{n+2}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+2} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.