L. IBN KHALDOUN
RADES

Mr. ABIDI Farid

Devoir de synthèse n°2
Mathématiques

Classe : $4M_1$ 04/03/2008 Durée : 4h

Exercice 1 **:QCM** (3 point)

Chaque question comporte trois propositions (A) , (B) et (C). Une seule proposition est exacte.
Une réponse exacte apporte 0,75 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse donne zéro point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Justifier seulement la proposition qui vous semble exacte.

N°	*Question*	*Proposition A*	*Proposition B*	*Proposition C*
1	La composée de homothétie de centre Ω rapport (-1) et de la symétrie orthogonale d'axe passant par Ω est :	translation	antidéplacement	Similitude indirecte à centre
2	L'écriture complexe de la similitude indirecte de centre Ω(1+*i*) de rapport 3 et d'axe la droite $\Delta : y = -x+2$ est:	$z' = 3i.\overline{z} + 1 + i$	$z' = \overline{3i.z} + 4i + 4$	$z' = 3i\overline{z} - 2i + 2$
3	La symétrie orthogonale d'axe (*AB*) avec $z_A = 1 + i$ et $z_B = 1$, a pour écriture complexe:	$z' = (1+i).\overline{z} - 1$	$z' = -\overline{z} + 2$	$z' = (1+i).\overline{z} - i$
4	ABC est un triangle isocèle rectangle direct en A. I est le milieu de [AC]. La similitude indirecte de centre A qui transforme B en I a pour rapport *k* et axe (Δ)	$k = \frac{1}{2}$ et (Δ) la médiatrice de [BC].	$k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et (Δ) la bissectrice intérieure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI})$	$k = \sqrt{2}$ et (Δ) la médiatrice de [BC].

Exercice 2 (4 points)

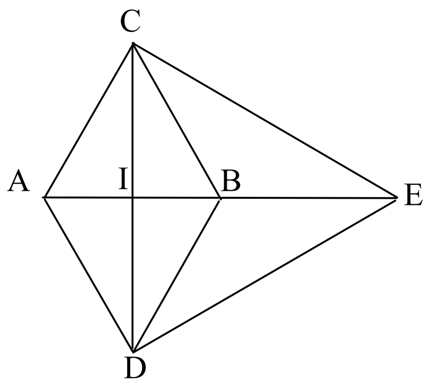
1. a) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 ? justifier.
   b) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 ? Justifier.
   c) En déduire que $6^{40} \equiv 1[11]$ et que $6^{40} \equiv 1[5]$.
   d) Démontrer que $6^{40} - 1$ est divisible par 55.

2. Dans cette question x et y désignent des entiers relatifs.
   a) Montrer que l'équation (E) : 65 x – 40 y = 1 n'a pas de solution.
   b) Montrer que l'équation (E') : 17 x – 40 y = 1 admet au moins une solution.
   c) Déterminer à l'aide à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple (x_0, y_0) solution de (E').
   d) Résoudre l'équation (E').
   En déduire qu'il existe un unique entier naturel n inférieur à 40 tel que : $17n \equiv 1[40]$.

Exercice 3 (5 points)

Dans la figure ci-contre, ABC , ADB et CDE sont trois triangles équilatéraux directs tels que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

On désigne par I le milieu de [AB] .



1. Montrer que AE = 2AB.

Soit S la similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ qui envoie A en B et E en D.

2. Déterminer k et vérifier que $\theta = -\frac{2\pi}{3}$.
3. On désigne par $(\mathscr{C})$ le cercle circonscrit au triangle ACE.
Démontrer que le transformé de $(\mathscr{C})$ par S est le cercle $(\mathscr{C}')$ de diamètre [BD] et déduire que l'image du point C par S est le point J milieu de [DE].
4. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(A,\vec{u},\vec{v}\right)$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AI}$.
   a) Déterminer les affixes des points B, C , D et E.
   b) Donner la forme complexe de S et préciser l'affixe de son centre Ω.
5. Soit S' la similitude directe de centre Ω, de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
   a) Déterminer la nature et les éléments de la transformation $S' \circ S$.
   b) Calculer l'affixe du point A' transformé de A par $S' \circ S$.

Problème (8 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0, 2] par $f(x) = 2\sqrt{2x - x^2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $R = \left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan.

1. a) Montrer que f est dérivable sur $]0, 2[$ puis déterminer f' la fonction dérivée de f.
   b) Dresser le tableau de variations de f puis Tracer (C).
   c) On suppose que l'œuf d'un oiseau a la forme d'un solide de révolution obtenu par rotation de la courbe (C) autour de l'axe $\left(O,\vec{i}\right)$.
   Calculer le volume $\mathcal{V}$, en unité de volume, de cet œuf.
2. Soit (C') le symétrique de (C) par rapport à la droite $\left(O,\vec{i}\right)$, on note Γ la réunion des deux courbes (C) et (C').
   a) Montrer que (Γ) a pour équation $(x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.
   b) Montrer que (Γ) est une ellipse dont on précisera le centre Ω, l'excentricité e et les foyers F et F'.
   c) Ecrire une équation de la tangente (T) à (Γ) en son point M_0 d'abscisse $\frac{3}{2}$ et d'ordonnée y_0 positive.

d) On note H et H' les projetés orthogonaux des foyers respectivement des foyers F et F' sur (T). Montrer que $FH.F'H' = 1$.

3. On désigne par F la fonction définie sur l'intervalle $[0,\pi]$ par $F(x) = \int_0^{1+\cos x} f(t)dt$.

a) Montrer que F est dérivable sur $[0,\pi]$ et que pour tout x de $[0,\pi]$, $F'(x) = -2\sin^2 x$.

b) Calculer $F(\pi)$ et en déduire l'expression de F(x) pour tout x de $[0,\pi]$.

c) Calculer l'aire $\mathscr{A}$, en unité d'aire, de l'intérieur de l'ellipse (Γ).

4. On pose : $u_0 = 2\int_0^2 \sqrt{2x - x^2}dx$ et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = 2\int_0^2 x^n\sqrt{2x - x^2}dx$.

a) Calculer $u_0 - u_1$; en déduire u_1.

b) Soit n un entier naturel non nul.

Vérifier que $u_n - u_{n+1} = \int_0^2 x^n.(2-2x)\sqrt{2x - x^2}dx$ puis montrer, à l'aide d'une intégration par partie, que : $u_{n+1} = \left(\dfrac{2n+3}{n+3}\right)u_n$.

c) En déduire l'intégrale $I = \int_0^2 (x^2 - 2x + 3)\sqrt{2x - x^2}dx$.

d) Montrer que la suite (u_n) est croissante. En déduire que , pour tout entier n , $u_n \geq \pi$.

e) Montrer que si la suite (u_n) converge vers ℓ alors $\ell = 0$. Conclure.

Corrigé du devoir de synthèse n°2 – du 04 Mars 2008

Exercice 1 (QCM)

1. Proposition **B** est exacte :
   En effet : la composée d'une symétrie orthogonale et d'une homothétie de rapport -1 est une similitude indirecte de rapport 1 donc un antidéplacement.

2. Proposition B est exacte :
   En effet : Soit f l'application du plan dans lui-même dont l'écriture complexe est
   $z' = \overline{3iz} + 4i + 4 = -3i\overline{z} + 4 + 4i$. f est une similitude indirecte de rapport $|-3i| = 3$ et de centre le point dont $\Omega(1+i)$ car $-3i\overline{(1+i)} + 4 + 4i = -3i(1-i) + 4 + 4i = 1 + i$. Pour justifier que la droite $(\Delta): y = -x + 2$ est bien l'axe de f et en remarquant que le point B(2i) appartient à (Δ), il suffit de démonter que $\overrightarrow{\Omega B'} = 3\overrightarrow{\Omega B}$ où B' = f(B).
   $z_{B'} = -3i(-2i) + 4 + 4i = -2 + 4i$, $\text{Aff}(\overrightarrow{\Omega B}) = -1 + i$ et $\text{Aff}(\overrightarrow{\Omega B'}) = -3 + 3i = 3(-1+i)$.
   D'où le résultat.

3. Proposition B est exacte :
   En effet : $z' = -\overline{z} + 2$ est l'écriture complexe d'un antidéplacement. Vérifiant que cet antidéplacement fixe les points A et B.
   Pour $z = z_A = 1 + i$, on a $z' = -\overline{(1+i)} + 2 = -(1-i) + 2 = 1 + i = z_A$
   Pour $z = z_B = 1$, on a : $z' = -\overline{1} + 2 = 1 = z_B$.
   C'est ce qui justifie le résultat.

4. Proposition A est exacte :
   En effet : $k = \frac{AI}{AB} = \frac{\frac{1}{2}AC}{AC} = \frac{1}{2}$,(Δ) est la bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et comme ABC est isocèle de sommet principale A alors (Δ) est la médiatrice du segment [BC].

Exercice 2 corrigé

1)a) $6 \equiv 6[11], 6^2 \equiv 3[11], ..., 6^5 \equiv -1[11] \Rightarrow (6^5)^2 \equiv (-1)^2 [11] \Leftrightarrow \boxed{6^{10} \equiv 1[11]}$.

Donc le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11est 1.

b) $6 \equiv 1[5] \Rightarrow 6^4 \equiv 1[5]$. donc le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 est 1.

c) $6^{10} \equiv 1[11] \Leftrightarrow (6^{10})^4 \equiv 1[11] \Leftrightarrow \boxed{6^{40} \equiv 1[11]}$,car si $a \equiv b[n]$ et $p \in \mathbb{N}$, on a : $a^p \equiv b^p [n]$.

$6^4 \equiv 1[5] \Leftrightarrow (6^{10})^4 \equiv 1[5] \Leftrightarrow \boxed{6^{40} \equiv 1[5]}$.

d) comme $6^{40} \equiv 1[11]$ alors $6^{40} - 1 \equiv 0[11]$ donc 11 divise $6^{40} - 1$.

de même, $6^{40} \equiv 1[5] \Leftrightarrow 6^{40} - 1 \equiv 0[5]$ donc 5 divise $6^{40} - 1$.

$6^{40} - 1$ est divisible par 5 et par 11, donc divisible par $5 \times 11 = 55$.

2) Dans cette question x et y désignent des entiers relatifs.

a) l'équation (E): $65x - 40y = 1$ possède des solutions si $p\gcd(65, 40) = 1$ (théorème de Bezout)

or $p\gcd(65, 40) = 5 \neq 1$, donc cette équation n'a pas de solutions.

b) D'après le théorème de Bezout, il existe deux entiers x et y tels que pour tout entiers a et b $ax + by = p\gcd(a, b)$

Donc l'équation (E') : $17x - 40y = 1$ admet au moins une solution, car $p\gcd(17, 40) = 1$

c) En appliquant l'algorithme d'Euclide au nombre 17 et 40 on obtient le couple solution: $\boxed{(-7; -3)}$

d) Résolution de l'équation (E').

$$\left.\begin{aligned} &17x - 40y = 1 \\ &17 \times -7 - 40 \times -3 = 1 \end{aligned}\right\} \text{ En soustrayant ces deux égalités, on obtient: } 17(x + 7) = 40(y + 3)$$

17 divise $40(y + 3)$ et 17 est premier avec 40, d'après le théorème de Gauss, 17 divise $(y + 3)$

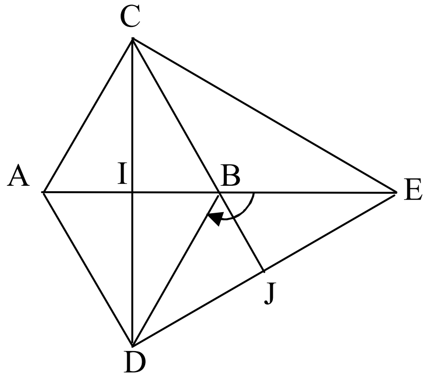
il existe donc un entier k tel que: $y + 3 = 17k \Leftrightarrow \boxed{y = 17k - 3}$

En remplaçant la valeur de y dans l'équation (E'), on obtient: $\boxed{x = 40k - 7}$

Le couple solution de l'équation (E') est $\boxed{(40k - 7; 17k - 3), \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$.

l'unique entier naturel $x_0 \leq 40$ tel que $17x_0 \equiv 1[40]$ vérifie: $0 \leq 40k - 7 \leq 40 \Leftrightarrow k = 1$, soit donc $\boxed{x_0 = 33}$.

Corrigé exercice 3



1. (CI) : bissectrice intérieure de $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$ donc $\left(\widehat{\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CB}}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

$\left(\widehat{\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CE}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ par suite (CB) est bissectrice intérieure de $\left(\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CE}\right)$.

De même (DB) : bissectrice intérieure de $\left(\overrightarrow{DI},\overrightarrow{DE}\right)$, donc B est le centre du triangle équilatéral DEC ; BE = 2 BI = AB et par suite AE =2AB.

1. S(A) = B et S(E) = D donc $k=\frac{BD}{AE}=\frac{AB}{AE}=\frac{1}{2}$

   et $\theta\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BD}}\right)[2\pi]\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BD}}\right)[2\pi]\equiv-\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

2. Le triangle ACE est rectangle en C , le cercle (T) a pour diamètre [AE], d'où (T') est le cercle de diamètre [BD] = S([AE]) .

J est milieu de [ED] et BDE est isocèle donc $\left(\widehat{\overrightarrow{JB},\overrightarrow{JD}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et J ∈ (T ').

AEC est un triangle demi-équilatéral direct et BDJ est un triangle demi équilatéral direct donc S(C) = J.

3. a) $z_B = 2$; $z_C = 1 + i\sqrt{3}$; $z_D = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_E = 4$.

   b) $z' = az + b = \frac{1}{2}e^{-i\frac{2\pi}{3}}z + b = -\frac{1}{4}(1+i\sqrt{3})z + b$.

S(A) = B donc b = 2 d'où $z' = -\frac{1}{4}(1+i\sqrt{3})z + 2$.

►Ou : S(A) = B et S(E) = D donnent $2= 0 + b$ et $1 - i\sqrt{3} = a(4) + b$

$b = 2$ et $a = -\frac{1}{4}(1+i\sqrt{3})$. Donc $z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{2}{7}(5-i\sqrt{3})$.

5.a) S'oS est une similitude de centre Ω et de rapport $\frac{1}{2}\times 2 = 1$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}=-\pi$.

S'oS est une symétrie centrale de centre Ω.

b) $z_{A'} = 2z_\Omega = \frac{4}{7}(5-i\sqrt{3})$.

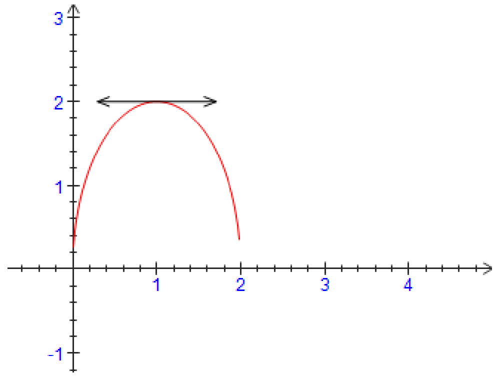
Problème :

1.a) $x \mapsto 2x - x^2$ est dérivable et strictement positive sur l'intervalle $]0,2[$ dont f est dérivable sur $]0,2[$ et pour tout x de $]0,2[$, on a : $f'(x) = \dfrac{2(1-x)}{\sqrt{2x - x^2}}$.

b)

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	0		1		2
f'(x)	|	+	0	-	|
f(x)		↗	2	↘	
	0				0



c) $\mathcal{V} = \pi \int_0^2 f^2(x)dx = 4\pi \int_0^2 (2x - x^2)dx = 4\pi \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 = \frac{16\pi}{3}$

2.a) $M(x,y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow y = f(x)$ ou $y = -f(x) \Leftrightarrow y^2 = (f(x))^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + \frac{y^2}{4} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

Donc $\Gamma : (x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.

b) On pose $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y \end{cases}$ et $\Omega(1,0)$; il en résulte que $\Gamma : X^2 + \frac{Y^2}{4} = 1$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.

Ainsi, (Γ) est une ellipse de centre $\Omega(1,0)$ et d'excentricité $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

	Dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$	Dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$
Les foyers	$F(0,\sqrt{3})$, $F'(0,-\sqrt{3})$	$F(1,\sqrt{3})$, $F'(1,-\sqrt{3})$

c) $M_0\left(\frac{3}{2}, y_0\right) \in (\Gamma)$ et $y_0 \geq 0 \Leftrightarrow {y_0}^2 = 3$ et $y_0 \geq 0 \Leftrightarrow y_0 = \sqrt{3}$ donc $M_0\left(\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right)$

	Dans $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$	Dans $(O,\vec{i},\vec{j})$
M_0	$M_0\left(\frac{1}{2},\sqrt{3}\right)$	$M_0\left(\frac{3}{2},\sqrt{3}\right)$
(T)	$\frac{1}{2}X+\frac{\sqrt{3}}{4}Y=1$ $\Leftrightarrow 2X+\sqrt{3}Y-4=0$	$2x+\sqrt{3}y-6=0$

Donc $(T): 2x+\sqrt{3}y-6=0$.

d) FH = d(F, T) = $\frac{|-1|}{\sqrt{7}}=\frac{1}{\sqrt{7}}$ et F'H' = d(F', T) = $\frac{|-7|}{\sqrt{7}}=\frac{7}{\sqrt{7}}$ d'où FH.F'H'= 1.

3.a) $\begin{cases} u: x\mapsto 1+\cos x \text{ est dérivable sur } [0,\pi] \\ u([0,\pi])=[u(\pi),u(0)]=[0,2] \\ f \text{ est continue sur } [0,2] \end{cases}$ donc F est dérivable sur [0, 2].

Pour tout x de [0, 2], F'(x) = $-\sin x.f(\cos x)=-2\sin x\sqrt{1-\cos^2 x}=-2\sin x|\sin x|=-2\sin^2 x$.

b) $F(\pi)=\int_0^0 f(t)dt=0$

F est la primitive sur $[0,\pi]$ de la fonction $t\mapsto -2\sin^2 t$ qui s'annule en 0 d'où pour tout x de $[0,\pi]$,

$$F(x)=\int_\pi^x -2\sin^2 t\,dt=\int_\pi^0(\cos 2t-1)dt=\left[\frac{1}{2}\sin 2t-t\right]_\pi^x=\frac{1}{2}\sin 2x-x+\pi .$$

c) $\mathcal{A}=2\int_0^2 f(t)dt=2\int_0^{1+\cos 0} f(t)dt=2F(0)=2\pi$.

4.a) $u_0-u_1=2\int_0^2\sqrt{2x-x^2}dx-2\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}dx=2\int_0^2(1-x)\sqrt{2x-x^2}dx=\left[\frac{2}{3}(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}\right]_0^2=0$

Par conséquent $u_1=u_0=\frac{1}{2}.\mathcal{A}=\pi$.

b) $u_n-u_{n+1}=2\int_0^2(x^n-x^{n+1})\sqrt{2x-x^2}dx=\int_0^2 x^n(2-2x)\sqrt{2x-x^2}dx$

On procède par une intégration par partie et on pose donc :

$g(x)=x^n$ $g'(x)=nx^{n-1}$

$$h'(x)=(2-2x)\sqrt{2x-x^2} \qquad h(x)=\frac{2}{3}(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}$$

$$\begin{aligned}u_n-u_{n+1}&=\left[\frac{2}{3}(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}\right]_0^2-\frac{2}{3}n\int_0^2(2x^n-x^{n+1})\sqrt{2x-x^2}\,dx\\&=-\frac{2}{3}n\left(2\int_0^2 x^n\sqrt{2x-x^2}\,dx-\int_0^2 x^{n+1}\sqrt{2x-x^2}\,dx\right)\\&=-\frac{2}{3}n\left(u_n-\frac{1}{2}u_{n+1}\right)\end{aligned}$$

D'où $6(u_n-u_{n+1})=-2n(2u_n-u_{n+1})\Leftrightarrow(3+2n)u_n=(3+n)u_{n+1}\Leftrightarrow u_{n+1}=\left(\frac{3+2n}{3+n}\right)u_n$.

c) On utilise la linéarité de l'intégrale , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}I&=\int_0^2 x^2\sqrt{2x-x^2}\,dx-2\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,dx+3\int_0^2\sqrt{2x-x^2}\,dx\\&=\frac{1}{2}u_2-u_1+\frac{3}{2}u_0\\&=\frac{5}{8}u_0+\frac{1}{2}u_0\\&=\frac{9\pi}{8}\end{aligned}$$

d) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=\left(\frac{n}{n+3}\right)u_n>0$ car (u_n) est une suite à termes strictement positifs.

Par conséquent, la suite (u_n) est croissante.

Il en résulte que la suite (u_n) est minorée par son premier terme $u_0=\pi$ ce qui entraine :
$u_n\geq\pi$, pour $n\in\mathbb{N}$.

e) Si (u_n) converge vers ℓ alors $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+3}{n+3}\right).u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2n}{n}\right).\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2\ell$

D'où $\ell=0$.

Or , pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n\geq\pi$ entraine $\ell\geq\pi$; ce qui est absurde avec $\ell=0$.

Par conséquent , la suite (u_n) n'est pas convergente et croissante d'où (u_n) est divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$