

Exercice 1: (3 points)

Pour chaque question, répondre par **Vrai** ou **Faux**. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapport 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,5 points ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

1. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et si pour tout $x < 1$, on a $g(x) = 2x + \sqrt{1-x}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ f(x) = +\infty$.
2. Soit f une fonction paire définie sur \mathbb{R} telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) = -\ell$.
3. Si pour tout x réel strictement négatif, on a : $|f(x) - 3| \leq -\frac{1}{x}$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$.
4. Soit f la fonction définie et continue sur \mathbb{R}^* dont le tableau des variations est :

x	-3	0	2	4
f(x)	1	5	-3	1

L'image de l'intervalle $[-2, 3]$ par f est $[-3, 5]$.

5. Si f est une fonction définie sur \mathbb{R} et dont la courbe représentative admet, dans un repère du plan, pour asymptote au voisinage de $-\infty$ la droite d'équation $y = -x + 1$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
6. Soit la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$. Pour tout x de $[0, 1]$, le réel $f \circ f(x) = x$.

Exercice 2: (7 points)

On note, pour tout entier naturel $n \geq 3$, (E_n) l'équation $\frac{x^3}{x^2 - 1} = n$.

1. Etudier les variations de la fonction f définie sur $[2, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.
2. Montrer que pour tout entier n , $n \geq 3$, l'équation (E_n) possède une unique solution, notée x_n , sur l'intervalle $[2, +\infty[$.
3. Quelle est la monotonie de la suite (x_n) ?
4. Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, $n - 1 \leq x_n \leq n$.
5. En déduire la limite de la suite (x_n) puis de la suite de terme général $\frac{x_n}{n}$.
6. Donner une valeur approchée de x_3 par défaut à près 10^{-1} .

Exercice 3: (5 points)

On considère, dans l'ensemble \mathbb{C}^* des nombres complexes non nuls, l'équation (E) :

$$z^3 = (-2 - 2i\sqrt{3})\bar{z}.$$

- Ecrire sous forme exponentielle le nombre complexe $u = -2 - 2i\sqrt{3}$.
- On pose $z = re^{i\alpha}$ où r est un réel strictement positif et α un réel de l'intervalle $[0, 2\pi[$.
 - Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $r^2 e^{i4\alpha} = 4e^{i\frac{4\pi}{3}}$.
 - En déduire que l'équation (E) admet, dans \mathbb{C}^* , quatre solutions que l'on donnera sous forme exponentielle.
- Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On note A, B, C et D les images des solutions de (E) d'arguments respectifs $\alpha_A, \alpha_B, \alpha_C$ et α_D vérifiant $\alpha_A < \alpha_B < \alpha_C < \alpha_D$.
 - Placer les points A, B, C et D. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?
 - Soit E le milieu du segment [AD]. Ecrire l'affixe z_E de E sous forme exponentielle et sous forme algébrique.
 - En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 4: (5 points)

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) (d'unité graphique 2cm).

On considère les points E et F d'affixes respectives $z_E = 1+i$ et $z_F = \frac{1-i}{2}$.

- Ecrire z_E et z_F sous forme exponentielle.
- Montrer que pour tout θ de $[0, \pi[$, le point M d'affixe $z = e^{2i\theta}$ appartient au cercle (Γ) de centre O et de rayon 1.
- Montrer que pour tout M de (Γ) , $EM \times FM = \left| e^{4i\theta} + 1 - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \right) e^{2i\theta} \right|$.
- Montrer que pour tout θ de $[0, \pi[$, $e^{4i\theta} + 1 = 2 \cos 2\theta e^{i2\theta}$.
 - En déduire que $EM \times FM = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(2 \cos 2\theta - \frac{3}{2} \right)^2}$.
- Montrer que pour tout réel θ de $[0, \pi[$, $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} + \left(2 \cos 2\theta - \frac{3}{2} \right)^2 \leq \frac{25}{2}$.
 - Déterminer l'affixe z_0 du point M_0 correspondant à la valeur maximale de $EM \times FM$.

Placer le point M_0

Solution**Exercice 1: (3 points)****1. Faux**

En effet : Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et si pour tout $x < 1$, on a $g(x) = 2x + \sqrt{1-x}$ alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2(\sqrt{-x})^2 + \sqrt{-x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-x} \left[-2\sqrt{-x} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \right] = -\infty$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ f(x) = -\infty$.

2. Faux

En effet : Si f est une fonction paire définie sur \mathbb{R} telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell.$$

3. Vrai

Si pour tout x réel strictement négatif, on a : $|f(x) - 3| \leq -\frac{1}{x}$, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} = 0$ alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3.$$

4. Vrai

En effet : $([-2, 3]) = [-3, 5]$.

5. Vrai

Comme la droite d'équation $y = -x + 1$ est une asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $-\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + 1 = +\infty$.

6. Vrai

Soit la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1 = (1 - \sqrt{x})^2$.

Pour tout x de $[0, 1]$, le réel $f \circ f(x) = f(f(x)) = (1 - \sqrt{f(x)})^2 = (1 - (1 - \sqrt{x}))^2 = (\sqrt{x})^2 = x$.

Exercice 2: (7 points)

On note, pour tout entier naturel $n \geq 3$, (E_n) l'équation $\frac{x^3}{x^2 - 1} = n$.

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

f est continue et dérivable sur $[2, +\infty[$ et pour tout x de $[2, +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - 2x \cdot x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} > 0.$$

x	2	$+\infty$
f(x)	$\frac{8}{3}$	$+\infty$

2. Soit $n \geq 3$.

f est continue et strictement croissante sur $[2, +\infty[$, $f([2, +\infty[) = \left[\frac{8}{3}, +\infty[$ et $n \in \left[\frac{8}{3}, +\infty[$.

Donc l'équation (E_n) admet sur l'intervalle une unique solution x_n .

Etudier les variations de la fonction f définie sur $[2, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.

3. On a pour tout $n \geq 3$, $f(x_n) = n$ et $f(x_{n+1}) = n+1$. Donc $f(x_{n+1}) > f(x_n)$. Et comme f est strictement croissante sur $[2, +\infty[$ alors nécessairement $x_{n+1} > x_n$. Ainsi la suite (x_n) est croissante.

4. Pour tout entier $n \geq 3$, On a :

$$f(n-1) - n = \frac{(n-1)^3}{(n-1)^2 - 1} - n = \frac{(n-1)^3 - n(n-1)^2 + n}{(n-1)^2 - 1} = \frac{-(n-1)^2 + n}{(n-1)^2 - 1} = \frac{-n^2 + 3n - 1}{(n-1)^2 - 1} = \frac{-n(n-3) - 1}{(n-1)^2 - 1} < 0$$

$$\text{et } f(n) = \frac{n^3}{n^2 - 1} - n = \frac{n^3 + n}{n^2 - 1} > 0$$

$f(n-1) < n$ et $f(n) > n$ donc $f(n-1) < f(x_n) < f(n)$ d'où $n-1 \leq x_n \leq n$.

5. Pour tout $n \geq 3$, $x_n \geq n-1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n-1 = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.

D'autre part, pour tout $n \geq 3$, $1 - \frac{1}{n} \leq \frac{x_n}{n} \leq 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = 1$.

6. On sait que $2 \leq x_3 \leq 3$.

$$f(2,5) \approx 2,9762 \quad \text{et} \quad f(3) = 3,375 \quad \text{donc} \quad 2,5 < x_3 < 3$$

$$f(2,75) \approx 3,169 \quad \text{et} \quad f(2,5) \approx 2,9762 \quad \text{donc} \quad 2,5 < x_3 < 2,75$$

$$f(2,6) \approx 3,0514 \quad \text{et} \quad f(2,5) \approx 2,9762 \quad \text{donc} \quad 2,5 < x_3 < 2,6$$

Une valeur approchée de x_3 par défaut à près 10^{-1} est 2,5.

Exercice 3: (5 points)

On considère, dans l'ensemble \mathbb{C}^* des nombres complexes non nuls, l'équation (E) :

$$z^3 = (-2 - 2i\sqrt{3})\bar{z}.$$

$$1. u = -2 - 2i\sqrt{3} = 4 \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 4e^{i\frac{4\pi}{3}}.$$

2. On pose $z = re^{i\alpha}$ où r est un réel strictement positif et α un réel de l'intervalle $[0, 2\pi[$.

$$a) (E) \Leftrightarrow r^3 e^{3i\theta} = (-2 - 2i\sqrt{3})re^{-i\theta} \Leftrightarrow r^2 e^{4i\theta} = 4e^{i\frac{4\pi}{3}}.$$

$$b) (E) \Leftrightarrow r^2 e^{4i\theta} = 4e^{i\frac{4\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = 4 \\ 4\theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

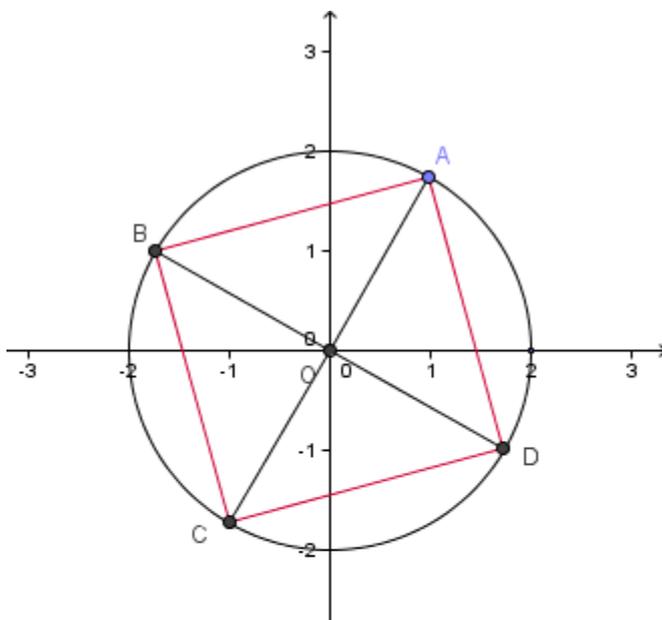
Les solutions de (E), dans \mathbb{C}^* , sont :

$$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}, z_1 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}, z_3 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right)} = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} \text{ et } z_4 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2}\right)} = 2e^{i\frac{11\pi}{6}}.$$

3. Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On note A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_B = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $z_C = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$ et $z_D = 2e^{i\frac{11\pi}{6}}$.

a)



$z_C = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} = -2e^{i\frac{\pi}{3}} = -z_A$ et $z_D = 2e^{i\frac{11\pi}{6}} = -2e^{i\frac{5\pi}{6}} = -z_B$ donc O est le milieu des segments [AC] et [BD] donc ABCD est un parallélogramme inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 2 d'où ABCD est un rectangle.

Comme $AC = |z_C - z_A| = 2|z_A| = 4$ et $BD = |z_D - z_B| = 2|z_B| = 4$ alors ABCD est un carré.

b) Soit E le milieu du segment [AD]. l'affixe de E est $z_E = \frac{z_A + z_D}{2}$.

Le module de z_E est $|z_E| = OE = \frac{OA}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Un argument de z_E est $\arg(z_E) \equiv (\vec{u}, \vec{OE}) [2\pi]$.

$$\arg(z_E) \equiv (\vec{u}, \vec{OA}) + (\vec{OA}, \vec{OE}) [2\pi] \Leftrightarrow \arg(z_E) \equiv \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} (\vec{OA}, \vec{OD}) [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg(z_E) \equiv \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg(z_E) \equiv \frac{\pi}{12} [2\pi]$$

D'où $z_E = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

$$\text{D'autre part : } z_E = \frac{z_A + z_D}{2} = \frac{1+i\sqrt{3} + (\sqrt{3}-i)}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\text{c) On en déduit : } \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Exercice 4: (5 points)

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) (d'unité graphique 2cm).

On considère les points E et F d'affixes respectives $z_E = 1+i$ et $z_F = \frac{1-i}{2}$.

$$1. \quad z_E = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ et } z_F = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

2. Pour tout θ de $[0, \pi[$, $OM = |z| = |e^{2i\theta}| = 1$ donc M appartient au cercle (Γ) de centre O et de rayon 1.

3. Soit M un point de (Γ) , on a :

$$\begin{aligned} EM \times FM &= \left| e^{i2\theta} - (1+i) \right| \cdot \left| e^{i2\theta} - \frac{(1-i)}{2} \right| = \left| \left[e^{i2\theta} - (1+i) \right] \cdot \left[e^{i2\theta} - \frac{(1-i)}{2} \right] \right| \\ &= \left| e^{i4\theta} + \frac{(1+i)(1-i)}{2} - \left(1+i + \frac{1-i}{2} \right) e^{i2\theta} \right| = \left| e^{i4\theta} + 1 - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \right) e^{2i\theta} \right| \end{aligned}$$

$$4. \text{ a) Pour tout } \theta \text{ de } [0, \pi[, \quad e^{4i\theta} + 1 = (e^{i2\theta})^2 + e^{i2\theta} \cdot e^{-i2\theta} = (e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}) e^{i2\theta} = 2 \cos 2\theta \cdot e^{i2\theta}$$

b) Il en résulte que, pour tout θ de $[0, \pi[$,

$$\begin{aligned} EM \times FM &= \left| e^{4i\theta} + 1 - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \right) e^{2i\theta} \right| = \left| 2 \cos 2\theta e^{i2\theta} - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \right) e^{2i\theta} \right| = |e^{i2\theta}| \left| 2 \cos 2\theta - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \right) \right| \\ &= \left| 2 \cos 2\theta - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(2 \cos 2\theta - \frac{3}{2} \right)^2}. \end{aligned}$$

5. a) Pour tout réel θ de $[0, \pi[$,

$$-1 \leq \cos 2\theta \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \cos 2\theta \leq 2 \Leftrightarrow -\frac{7}{2} \leq 2 \cos 2\theta - \frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } 0 \leq \left| 2 \cos 2\theta - \frac{3}{2} \right| \leq \frac{7}{2} \text{ d'où } 0 \leq \left(2 \cos 2\theta - \frac{3}{2} \right)^2 \leq \frac{49}{4}$$

$$\text{ou encore } \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} + \left(2 \cos 2\theta - \frac{3}{2} \right)^2 \leq \frac{25}{4}$$

$$\text{b) } EM \times FM \text{ est maximum} \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \left(2 \cos 2\theta - \frac{3}{2} \right)^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow \cos 2\theta = -1.$$

Comme $\theta \in [0, \pi[$ alors $2\theta \in [0, 2\pi[$ et par

suite, $2\theta = \pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$.

Donc l'affixe z_0 du point M_0 correspondant

à la valeur maximale de $EM \times FM$

est $z_0 = e^{i\pi} = -1$.

