Lycée IBN KHALDOUN - RADES

DEVOIR DE CONTROL E N°2

Mr ABIDI Farid

CLASSE: 4 ème *Mathématiques*

EPREUVE *MATHEMATIQUES*

Durée : **2h** | *Date* : 03-02-2010

Exercice 1 : (3 points)

Soit ABCDEFGH un cube de côté 3. On choisit un repère orthonormé direct $\left(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

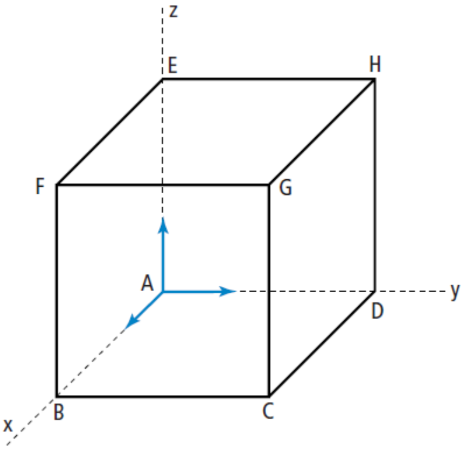
On appelle I et J les milieux respectifs des segments [EF] et [FG]. L est le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, 2).

Dans chaque question une seule réponse est exacte. Indiquer son numéro et la lettre y correspondant.

1. L'aire du triangle ALG est :
   a) $2\sqrt{2}$; b) $3\sqrt{2}$; c) $4\sqrt{2}$.

2. La distance de A à la droite (IJ) est :
   a) $\frac{27\sqrt{2}}{4}$; b) $\frac{9\sqrt{2}}{4}$; c) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

3. Le volume du tétraèdre AFIJ est:
   a) $\frac{7}{8}$; b) 1 ; c) $\frac{9}{8}$



Exercice 2 (6 points)

On pose $u_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$ et pour entier nature naturel non nul , $u_n = \int_0^1 \sqrt{x^n(1-x)}\,dx$.

1. Calculer u_0 .

2. a) Montrer $u_2 = \left[-\frac{2}{3}x(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1 + \frac{2}{3}\int_0^1 (1-x)\sqrt{1-x}\,dx$.

   b) En déduire que $u_2 = \frac{4}{15}$.

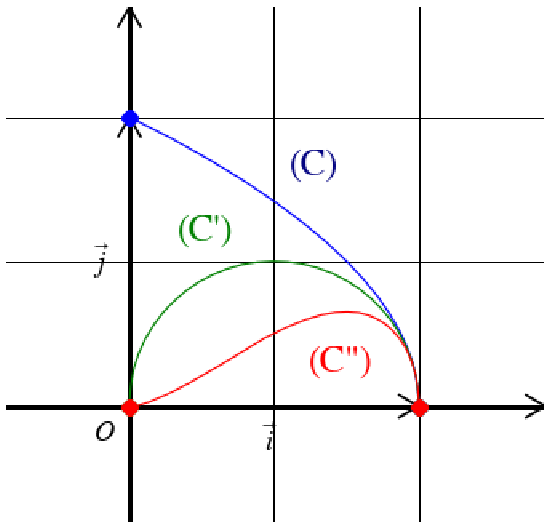
3. a) Montrer que pour tout entier n , $0 \le u_{n+1} \le u_n$.

   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. On a représenté ci-dessous trois fonctions f, g et h définies sur $[0,1]$ par : $f(x)=\sqrt{1-x}$, $g(x)=\sqrt{x(1-x)}$ et $h(x)=x\sqrt{1-x}$.

a) Identifier, pour chaque fonction, sa courbe représentative .

b) Montrer que $u_1=\frac{\pi}{8}$.



Exercice 3: (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. On considère les points A , B ,C , A_1 et B_1 d'affixe respectives $z_A=-5$, $z_B=-1-4i$, $z_C=-1$, $z_{A_1}=-1+4i$ et $z_{B_1}=3$.

1. a) Montrer que ABB_1A_1 est un carré de centre C.

   b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=-x-1$ est la médiatrice du segment $[AA_1]$.

2. On note h l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{1}{2}$.

   Déterminer les affixes des points $A'=h(A_1)$ et $B'=h(B_1)$.

3. Soit φ l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z'=-\frac{1}{2}i\bar{z}-1-\frac{1}{2}i$.

   a) Montrer que φ est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.

   b) Vérifier que $\varphi(A)=A'$ et $\varphi(B)=B'$.

4. a) Prouver que $h^{-1}\circ\varphi$ est un antidéplacement que l'on caractérisera.

   b) Caractériser φ.

Exercice 4 :(6 points)

OAB est un triangle isocèle en O tel que $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par I le milieu du segment [AB], par ($\mathscr{C}$) le cercle de centre O et de rayon OA et par (Γ) le cercle de diamètre [AB].
D est le point d'intersection du cercle ($\mathscr{C}$) et de la demi- droite [IO). On note J le point d'intersection de la demi-droite [DB) et du cercle (Γ).

1. a) Faire une figure.

b) Justifier que $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

c) Démontrer que le triangle DAJ est rectangle en J.

2. Soit S la similitude directe de centre A telle que S(I) = O.

a) Déterminer le rapport et l'angle de S.

b) Soit H le milieu du segment [JA] et K le point d'intersection de la droite (OJ) avec la droite (AD).
Démontrer que S(H) = K.

c) Déterminer la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{KI},\overrightarrow{KJ}\right)$.

3. Déterminer l'image du cercle (Γ) par S.

Corrigé

Exercice 1 :

1\. b) ; 2. a) ; 3. c)

Exercice 2 :

1\. $u_0=\int_0^1\sqrt{1-x}\,dx=-\int_0^1-\sqrt{1-x}\,dx=-\left[\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1=\frac{2}{3}$

2\. a) On a : $u_2=\int_0^1\sqrt{x^2(1-x)}\,dx=\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$

Calculons u_2 par une intégration par parties.

Posons : $u(x)=x$, $u'(x)=1$

$v'(x)=\sqrt{1-x}$, $v(x)=-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$

Nous obtenons :

$$u_2=-\left[\frac{2}{3}x(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1+\frac{2}{3}\int_0^1(1-x)\sqrt{1-x}\,dx$$

b) $u_2=-\left[\frac{2}{3}x(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1+\frac{2}{3}\int_0^1(1-x)\sqrt{1-x}\,dx=\frac{2}{3}\int_0^1(1-x)\sqrt{1-x}\,dx$

$$=\frac{2}{3}\left(\int_0^1\sqrt{1-x}\,dx-\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx\right)=\frac{2}{3}(u_0-u_2)=\frac{2}{3}u_0-\frac{2}{3}u_2$$

d'où $\frac{5}{3}u_2=\frac{2}{3}u_0\Leftrightarrow u_2=\frac{2}{5}u_0\Leftrightarrow u_2=\frac{4}{15}$

3\. a) Pour tout entier naturel et pour tout x de [0, 1], on a :

$0\le x^{n+1}\le x^n$ donc $0\le x^{n+1}\sqrt{1-x}\le x^n\sqrt{1-x}$ d'où

$0\le\int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x}\,dx\le\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx\Leftrightarrow 0\le u_{n+1}\le u_n$.

b) La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente.

4\. a) (C) est la courbe représentative de f , (C') est le courbe représentative de g et (C'') est la courbe représentative de h.

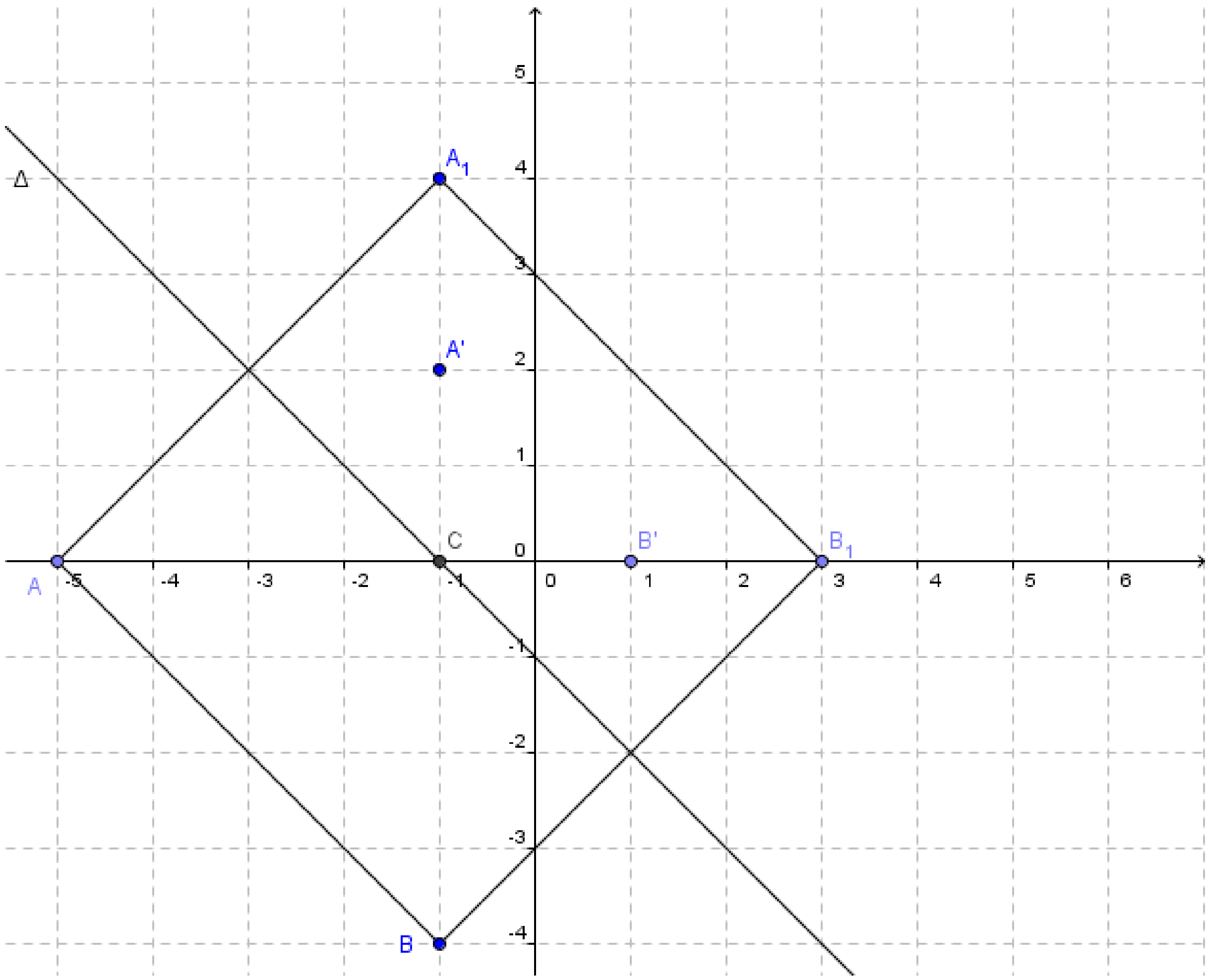
b) u_2 est l'aire, en ua, du demi disque de rayon $\frac{1}{2}$ donc $u_2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}$.

Exercice 3 :

1\. a) On a : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 4-4i$ et $z_{\overrightarrow{A_1B_1}} = z_{B_1} - z_{A_1} = 4-4i$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ d'où ABB_1A_1 est un parallélogramme.

D'autre part : $z_{\overrightarrow{AB_1}} = z_{B_1} - z_A = 8$ et $z_{\overrightarrow{BA_1}} = z_{A_1} - z_B = 8i$ d'où $AB_1 = BA_1$ et $(AB_1) \perp (BA_1)$.

Par suite, ABB_1A_1 est un carré.



b) Soit (Δ) la médiatrice de $[AA_1]$, $\overrightarrow{AA_1}(4+4i)$ est un vecteur normal à (Δ) et C(-1) le centre du carré ABB_1A_1 est un point de (Δ) donc :

$M(x, y) \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{AA_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AA_1} = 0 \Leftrightarrow 4(x+1)+4y = 0 \Leftrightarrow x+y+1=0 \Leftrightarrow y = -x-1$.

2\. L'écriture complexe de l'homothétie h de centre C et de rapport $\frac{1}{2}$ est : $z' - z_C = \frac{1}{2}(z - z_C) \Leftrightarrow z' = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}$.

Il en résulte : $A'=h(A_1)\Leftrightarrow z_{A'}=\frac{1}{2}z_{A_1}-\frac{1}{2}\Leftrightarrow z_{A'}=-1+2i$

Et $B'=h(B_1)\Leftrightarrow z_{B'}=\frac{1}{2}z_{B_1}-\frac{1}{2}\Leftrightarrow z_{B'}=1$.

3. a) L'écriture complexe de φ est $z'=-\frac{1}{2}i\bar{z}-1-\frac{1}{2}i$ donc φ est une similitude indirecte de rapport $\left|-\frac{1}{2}i\right|=\frac{1}{2}$.

b) Pour $z=z_A=-5$, on a : $z'=-\frac{1}{2}i\bar{5}-1-\frac{1}{2}i=\frac{5}{2}i-1-\frac{1}{2}i=-1+2i=z_{A'}$ donc $\varphi(A)=A'$.

Pour $z=z_B=-1-4i$, on a : $z'=-\frac{1}{2}i\overline{(-1-4i)}-1-\frac{1}{2}i=-\frac{1}{2}i(-1+4i)-1-\frac{1}{2}i=1=z_{B'}$ donc $\varphi(B)=B'$.

4. a) Comme h est l'homothétie de centre C(-1) et de rapport $\frac{1}{2}$ alors h^{-1} est l'homothétie de centre C et de rapport 2. Donc $h^{-1}\circ\varphi$ est la composée d'une similitude directe de rapport 2 et d'une similitude indirecte de rapport $\frac{1}{2}$ donc $h^{-1}\circ\varphi$ est une similitude indirecte de rapport 1 d'où $\varphi\circ h^{-1}$ est un antidéplacement.

D'autre part : $h^{-1}\circ\varphi(A)=h^{-1}(A')=A_1$ et $h^{-1}\circ\varphi(B)=h^{-1}(B')=B_1$.

Les segments $[AA_1]$ et $[BB_1]$ ont la même médiatrice (Δ), alors $h^{-1}\circ\varphi$ est la symétrie orthogonale d'axe (Δ).

b) On a : $h^{-1}\circ\varphi=S_\Delta\Leftrightarrow\varphi=h\circ S_\Delta$.

Ainsi, φ est la similitude indirecte de centre C, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'axe (Δ).

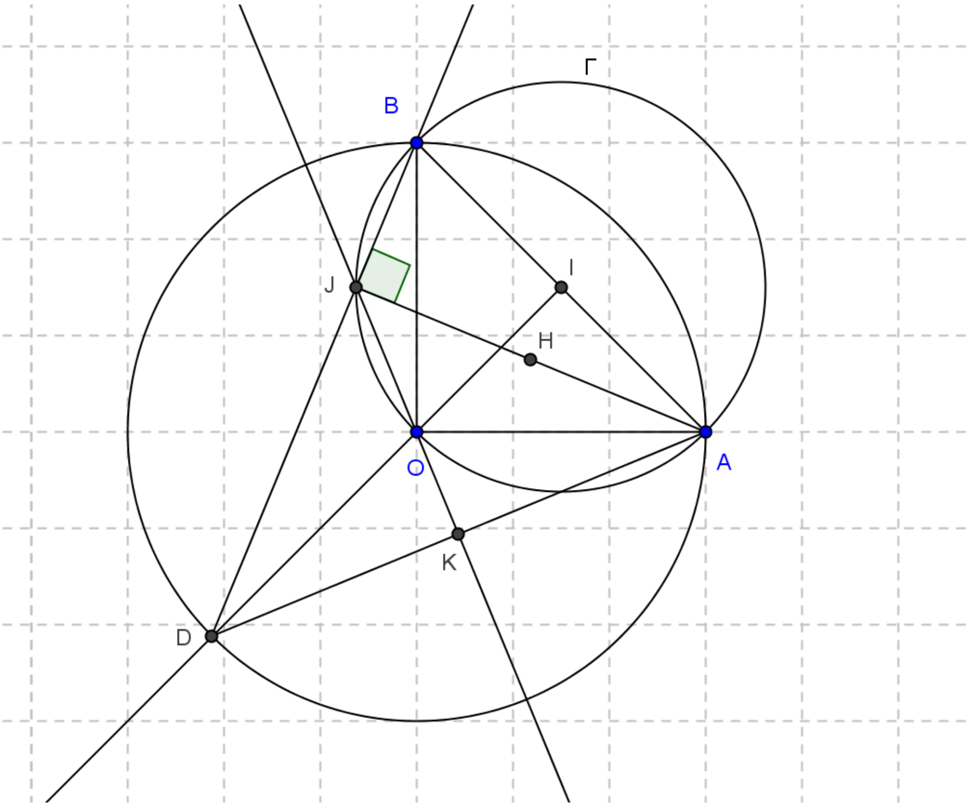
Exercice 4 :

1. a) Voir figure

b) Les points A , B et D sont situés sur le cercle ($\mathscr{C}$) de centre O donc

$$\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)\equiv\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)[2\pi]\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi].$$

c) J appartient au cercle (Γ) de diamètre [AB] donc le triangle ABJ est rectangle en J d'où (BD) $\perp$ (AJ). D'où le triangle DAJ est rectangle en J.



2. a) Le triangle AOI est isocèle et rectangle en I donc $\frac{AO}{AI}=\frac{\sqrt{2}AI}{AI}=\sqrt{2}$ et $\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AO}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$. Par suite, le rapport de S est $\sqrt{2}$ et l'angle de S est $\frac{\pi}{4}$.

b) Le triangle DAJ est rectangle en J et $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DJ}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ donc le triangle DAJ est isocèle en I; comme H est le milieu de [DA], alors le triangle AKJ est isocèle et rectangle en K. Et puisque H est milieu de [AJ] alors AKH est un triangle isocèle et rectangle en H. Il en résulte : $\frac{AK}{AH}=\frac{\sqrt{2}AH}{AH}=\sqrt{2}$ et $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AK}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ d'où S(H) = K.

c) On sait que : K milieu de [AD] , I milieu de [AB] et H milieu de [AJ] ; comme les points D, B et J sont alignés alors K, I et H sont alignés aussi. $\left(\overrightarrow{KI},\overrightarrow{KJ}\right)\equiv\left(\overrightarrow{KH},\overrightarrow{KJ}\right)[2\pi]\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{KI},\overrightarrow{KJ}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

3. (Γ) est le cercle de centre I passant par A dont $S(\Gamma)$ est le cercle de S(I) = O et passant par S(A) = A donc $S(\Gamma)$ = ($\mathscr{C}$).