

Exercice 1- (3 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte. Ecrire le numéro de chaque question et donner, **sans justifier**, la réponse qui lui correspond.

N	Questions	Réponses		
		a	b	c
1	L'ellipse d'équation $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ a pour excentricité	$e = \frac{1}{5}$	$e = \frac{4}{5}$	$e = 3$
2	Si l'aléa numérique X suit la loi binomiale B(n, p), $E(X) = 9$ et $\sigma(X) = \sqrt{6}$ alors :	$n = 18$ et $p = 0,5$	$n = 27$ et $p = \frac{1}{3}$	$n = 10$ et $p = 0,1$
3	L'équation $2^x + x + 1 = 0$, admet dans l'ensemble $\mathbb{R}$:	2 racines distinctes	aucune racine	une seule racine

Exercice 2- (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On appelle (C) l'ensemble des points

$M(x, y)$ tels que $x^2 - y^2 - x - 2 = 0$.

1) a- Prouver que (C) est une hyperbole dont on déterminera le centre, les sommets et les foyers.

b- Tracer (C).

2) Soit E le point de (C) d'abscisse 3 et d'ordonnée positive.

a- Ecrire une équation de la tangente (T) en E à (C).

b- La droite (T) coupe les asymptotes de (C) en P et Q. Prouver que E est le milieu de [PQ].

3) On désigne par (D) le domaine limité par (C) et la droite d'équation $x = 3$.

Calculer le volume engendré par la rotation de (D) autour de l'axe des abscisses.

Exercice 3- (6 points)

Une urne contient $n + 10$ boules ($n \geq 2$): n boules blanches, 6 boules rouges et 4 boules noires.

A- On tire simultanément et au hasard 2 boules de l'urne.

- 1) Calculer la probabilité $q(n)$ de tirer deux boules blanches.
- 2) On note $p(n)$ la probabilité de tirer deux boules de même couleur.

a- Montrer que $p(n) = \frac{n^2 - n + 42}{(n+10)(n+9)}$.

b- Vérifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} q(n)$. Interpréter ce résultat.

c- Existe-t-il un cas où $p(n) = \frac{31}{105}$?

B- On suppose dans cette partie que $n = 3$.

Un jeu consiste à tirer simultanément et au hasard 2 boules de l'urne.

Si les 2 boules tirées sont de même couleur, le joueur marque + 4 points ; sinon, il marque -1 point.

Le joueur répète le jeu deux fois en remettant, après le premier jeu, les boules tirées dans l'urne.

Soit X la variable aléatoire égale à la somme des points marqués par le joueur.

- 1) Justifier que les valeurs de X sont : -2 ; 3 et 8.
- 2) Déterminer la loi de probabilité de X .
- 3) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

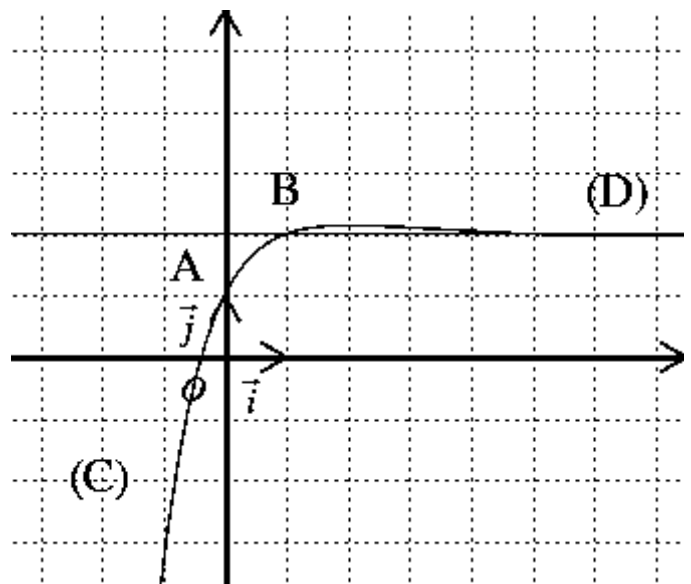
Exercice 4- (6 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On appelle (C) la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax + b)e^{-x} + c$, où a , b et c sont trois réels. (C) passe par les points $A(0, 1)$ et $B(1, 2)$. La droite (D) d'équation $y = 2$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

1. Montrer que $a = 1$, $b = -1$ et $c = 2$.
2. Dresser le tableau de variations de g .
3. On pose pour tout x de $[0, +\infty[$,

$$f(x) = \int_0^x (t-1)e^{-t} dt.$$

- a) Calculer $f(x)$ pour tout x de $[0, +\infty[$.
- b) En déduire l'aire $A(a)$, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$, où $a > 0$.
- c) Déterminer $\lim_{a \rightarrow +\infty} A(a)$.



Exercice 1-

1. b) ; 2. b) ; 3.c)

Exercice 2-

$$1. a) x^2 - y^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}} - \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1.$$

On pose $\begin{cases} X = x - \frac{1}{2} \\ Y = y \end{cases}$ et $\Omega\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, on obtient (H) : $\frac{X^2}{\frac{9}{4}} - \frac{Y^2}{\frac{9}{4}} = 1$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.

Donc (H) est une hyperbole équilatère de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et d'axe focal $(\Omega, \vec{i}) = (O, \vec{i})$.

Les sommets de (H) sont les points d'ordonnées nulle tel que l'abscisse x vérifie :

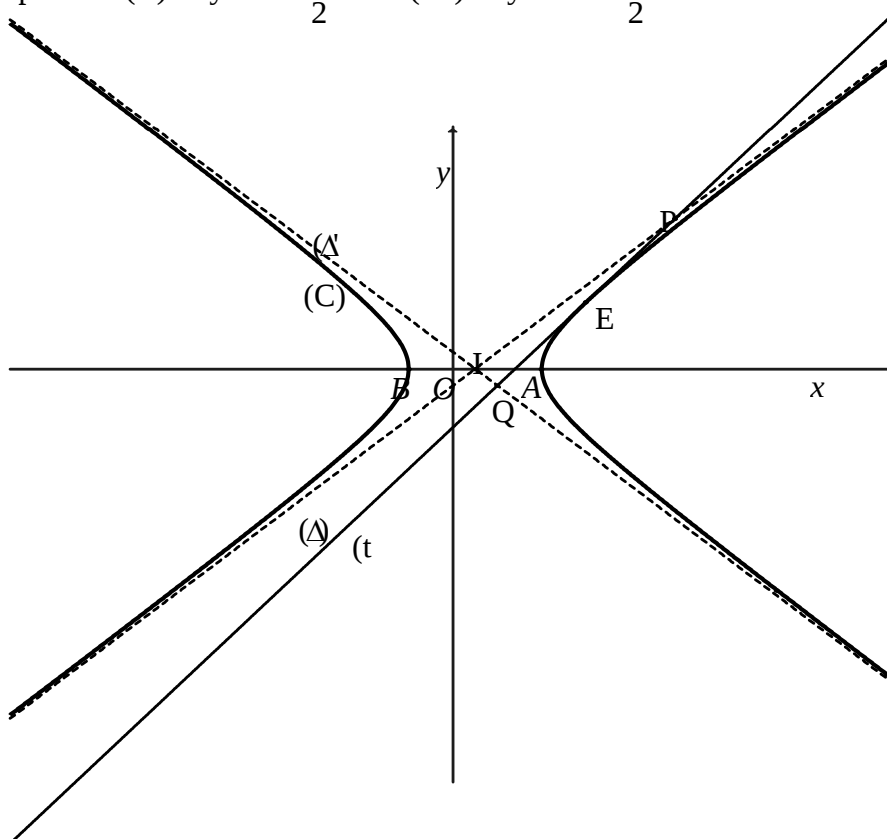
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ ou } x - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -1.$$

Donc $A'(-1, 0)$ et $A(2, 0)$ sont les sommets de (H).

On pose $a = b = \frac{3}{2}$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

Répère	Dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$	Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
Les foyers	$F\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, 0\right)$ et $F'\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}, 0\right)$	$F\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2}, 0\right)$ et $F'\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2}, 0\right)$

b) Asymptotes : $(\Delta) : y = x - \frac{1}{2}$ et $(\Delta') : y = -x + \frac{1}{2}$.



2. a) En remplaçant x par 3 dans l'équation cartésienne de (H), on obtient $y = 2$ ou $y = -2$, comme l'ordonnée de E est positive alors $E(3; 2)$;

Repère	Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$	Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
E	$E\left(\frac{5}{2}, 2\right)$	$E(3, 2)$
(T)	$\frac{\frac{5}{2}X}{\frac{9}{4}} - \frac{2Y}{\frac{9}{4}} = 1 \Leftrightarrow 10X - 8Y - 9 = 0$	$10\left(x - \frac{1}{2}\right) - 8y - 9 = 0 \Leftrightarrow 10x - 8y - 14 = 0$

Donc (T) : $5x - 4y - 7 = 0$ ou encore (T) : $y = \frac{5x-7}{4}$

b) Soit $(T) \cap (\Delta) = \{P\}$, $\frac{5x-7}{4} = x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 5$. D'où $P\left(5, \frac{9}{2}\right)$.

Soit $(T) \cap (\Delta') = \{Q\}$, $\frac{5x-7}{4} = -x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1$. D'où $Q\left(1, -\frac{1}{2}\right)$.

$\frac{x_P + x_Q}{2} = 3 = x_E$ et P, Q et E sont alignés donc E est le milieu de [PQ].

3. $V = \pi \int_2^3 y^2 dx = \pi \int_2^3 (x^2 - x - 2) dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^3 = \frac{11}{6} \pi$

Exercice 3 :

A. 1) $q(n) = \frac{C_n^2}{C_{n+10}^2} = \frac{n(n-1)}{(n+10)(n+9)}$.

2) a) $p(n) = \frac{C_n^2}{C_{n+10}^2} + \frac{C_6^2}{C_{n+10}^2} + \frac{C_4^2}{C_{n+10}^2} = \frac{n(n-1) + 30 + 12}{(n+10)(n+9)} = \frac{n^2 - n + 42}{(n+10)(n+9)}$.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - n + 42}{(n+10)(n+9)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{42}{n^2}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{10}{n}\right) \left(1 + \frac{9}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{42}{n^2}\right)}{\left(1 + \frac{10}{n}\right) \left(1 + \frac{9}{n}\right)} = 1$

De même $\lim_{n \rightarrow +\infty} q(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)}{(n+10)(n+9)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{10}{n}\right) \left(1 + \frac{9}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\left(1 + \frac{10}{n}\right) \left(1 + \frac{9}{n}\right)} = 1$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} q(n) = 1$.

Si le nombre de boules blanches est très grand, la probabilité d'avoir 2 boules blanches est égale à celle d'avoir 2 boules de la même couleur et cet événement est presque certain.

c) $p(n) = \frac{31}{105} \Leftrightarrow \frac{n^2 - n + 42}{(n+10)(n+9)} = \frac{31}{105} \Leftrightarrow 74n^2 - 694n + 1620 = 0$ d'où $n = 5$.
(n est un entier naturel supérieur à 2)

B.1. Les valeurs prises par X sont : $-1 - 1 = -2$, $4 - 1 = 3$ et $4 + 4 = 8$.

2. $p(X = -2) = \left(\frac{9}{13}\right)^2 = \frac{81}{169}$; $p(X = 3) = 2 \times \frac{4}{13} \times \frac{9}{13} = \frac{72}{169}$ et $p(X = 8) = \left(\frac{4}{13}\right)^2 = \frac{16}{169}$.

3. $E(X) = -2 \times \frac{81}{169} + 3 \times \frac{72}{169} + 8 \times \frac{16}{169} = \frac{182}{169} = \frac{14}{13}$.

Exercice 4 :

1. $A(0, 1) \in (C) \Leftrightarrow b + c = 1$, $B(1, 2) \in (C) \Leftrightarrow (a + b)e^{-1} + c = 2$,

$D : y = 2$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} axe^{-x} + be^{-x} + c = 2 \Leftrightarrow c = 2$.

Il en résulte : $b = 1 - c = -1$ et $(a + b)e^{-1} = 0 \Leftrightarrow a + b = 0 \Leftrightarrow a = -b \Leftrightarrow a = 1$.

2.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	$e^{-2} + 2$	2

3. On pose pour tout x de $[1, +\infty[$, $f(x) = \int_1^x (t-1)e^{-t} dt$

a) On pose : $u(t) = t - 1$, $u'(t) = 1$

$v'(t) = e^{-t}$, $v(t) = -e^{-t}$

$f(x) = \left[-(t-1)e^{-t} \right]_1^x + \int_1^x e^{-t} dt = -(x-1)e^{-x} + \left[-e^{-t} \right]_1^x = -(x-1)e^{-x} - e^{-x} + e^{-1} = e^{-1} - xe^{-x}$.

b) $A(a) = f(a) = e^{-1} - ae^{-a}$.

c) $\lim_{a \rightarrow +\infty} A(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-1} - ae^{-a} = e^{-1}$.